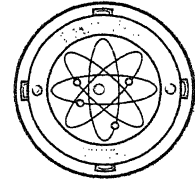
ISSN : 0505-5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 45 July 2002 No.3

विज्ञान परिषद् प्रयाग

महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नालॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विषय-सूची

Vol. 45 July 2002 No.3

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 3, July 2002.

वन्य प्राणी बचाव कार्य : 1

सतीश कुमार शर्मा
क्षेत्रीय वन अधिकारी, फुलवारी वन्य जीव अभयारण्य,
कोटड़ा, जिला—उदयपुर (राजस्थान)

[प्राप्त—फरवरी 2, 2002]

सारांश

कई बार वन्य प्राणी दुर्घटनावश कुंओं, बावड़ियों, नहरों आदि में गिर जाते हैं तो कई बार वे आबादी क्षेत्रों में भी भटक आते हैं। इन प्राणियों को वापस जंगल में उनके प्राकृतिक आवासों में भेजने या चिड़ियाघरों में रखने हेतु उनको पकड़ना-बचाना पड़ता है। प्रस्तुत पत्र में वन्य प्राणियों के बचाव के कुछ क्षेत्र अनुभवों को प्रस्तुत किया गया हैं।

Abstract

Wild animal rescue operations : Part-I. By Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, Phulwari Wildlife Sanctuary, Kotra, Dist. Udaipur (Rajasthan).

Sometimes wild animals are stumbled in wells, step-wells, canals etc and sometimes they accidently entre human habitations also. Resource operations are conducted by the forest officers to send back the stray animals in their natural habitats or in the zoos. In the present paper, field experiences of operations related with rescue of wild animals have been presented.

कई बार वन्य प्राणी दुर्घटनावश या अपने शिकार के पीछे घात लगाते \ दौड़ते या परभक्षी शिकारी से बचने हेतु कुंओं, टैंकों, नहरों आदि में गिर जाते हैं। कई बार जल स्त्रोतों (water holes) में मादा के साथ रह रहे बच्चे पानी पीने के दौरान फिसल कर या जल स्तर नीचे होने से पानी तक पहुँचने के प्रयास में गिर जाते हैं। कई बार बच्चों के गिरने पर मादायें ममतावश उनकी मदद करने के प्रयास में स्वयं भी गिर जाती हैं। कई बार प्रजनन काल में अतिरिक्त सक्रियता, दौड़-भाग व

टैरीटेरी के झगड़ों में भी प्राणी दुर्घटनाग्रस्त हो जाते हैं। कई बार वन्य प्राणी रास्ता भटक कर मानव आबादियों में पहुँच जाते हैं, यहाँ तक कि मनुष्यों के घरों में भी आ घुसते हैं। कई बार दुर्घनावश चिड़ियाघरों के प्राणी भी अपने पिंजड़े या बाड़ों से बाहर आ जाते हैं। सर्कसों या लोगों के घरों पर पालतू बनाये वन्य प्राणी भी भी-कभी मालिकों से छूट जाते हैं। कई बार सपेरों, मदारियों, शिकारियों, तस्करों आदि के चंगुल से भी जीवित वन्य प्राणी बरामद होते हैं। इन प्राणियों में अनेकों कई बार घायल एवं बीमार अवस्था में मिलते हैं। इन सब स्थितियों में मिले वन्य प्राणियों को सुरक्षित पकड़ कर, यदि बीमार हो तो इलाज कर पुनर्वास की जिम्मेदारी वन विभाग की होती है। पकड़े गये वन्य प्राणियों का या तो चिड़ियाघरों में पुनर्वास किया जाता है या प्राकृतिक वन क्षेत्र में। परन्तु इन सबसे पहले उन्हें पकड़ना पड़ता है। पकड़ने में यह ध्यान रखा जाता है कि बचाव अभियान में न तो वन्य प्राणी को नुकसान पहुँचे न जनहानि हो।

चिड़ियाघर के बंदी वन्य प्राणियों को पकड़ना, परिवहन करना व दूसरे पिंजरे/बाड़े में मुक्त करना अपेक्षाकृत आसान होता है लेकिन जंगली अवस्था में रहने वाली प्राणियों को आपात स्थिति में पकड़ना, परिवहन करना, स्थानान्तरित करना, इलाज करना एवं पुनः प्राकृतिक आवास में मुक्त करना एक कठिन कार्य है जो अक्सर वन विभाग के लोगों को करना पड़ता है। हालांकि बंदी प्राणियों के बचाव की अनेक तकनीकें वनकर्मियों की जानकारी में होती हैं परन्तु जंगल में स्वछंद विचरण करने वाले वन्य प्राणियों के दुर्घटना स्थल की हर बार परिस्थितियाँ अलग-अलग होती हैं, जिससे हर बार बचाव की पृथक योजना बनानी पड़ती है। यह एक कठिन कार्य है जिसमें अनुभवी व्यक्ति ज्यादा कुशलता दिखाते हैं।

प्रस्तुत प्रपत्र में वन्य प्राणियों के बचाव की कुछ वास्तविक घटनाओं की जानकारी दी गई है। इन बचाव अभियानों का अध्ययन करके कोई भी व्यक्ति भविष्य के वन्य प्राणी बचाव अभियानों में अधिक दक्षता प्रदर्शित करने की योजना बना सकता है।

प्रस्तुत लेख में तेंदुआ प्रजाति (Panther-*Panthera pardus*) के बचाव अभियानों के प्रेक्षणों एवं अनुभवों को दर्ज किया गया है। आगे के भागों में क्रमशः अन्य प्राणियों के बचाव की भी जानकारी दी जावेगी।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन राजस्थान वन विभाग से संबंधित है। वर्ष 1980 से 2001 तक राजस्थान राज्य के विभिन्न जिलों में आयोजित कुछ वन्य प्राणियों के बचाव अभियानों को इस अध्ययन का आधार बनाया गया है। राजस्थान में ऐसे अभियान राजकीय कर्त्तव्य के तहत वनकर्मियों को, विशेषकर वन्यजीव संभाग के अधिकारियों-कर्मचारियों को आयोजित करने पड़ते हैं। इन अभियानों में भाग लेने वाले अधिकारियों-कर्मचारियों से सम्पर्क कर के उनसे जानकारी अर्जित की गई। दो दशक वन क्षेत्र में कर्त्तव्य निर्वहन के दौरान ऐसे आयोजनों में भाग लेने या उन्हें देखने के अनुभव भी हुये। ये सभी सामूहिक अनुभव इस अध्ययन के आधार हैं।

परिणाम तथा विवेचना

राजस्थान में तेंदुओं सहित विभिन्न वन्य प्राणियों के कुओं, पानी के टैंकों, नहरों के गिरने के प्रकरण सामने आते रहते हैं। कई जगह कुंओं एवं पक्के टैंकों की लागत घटाने के लिये लोग उनकी चिनाई भूमि तल तक कर छोड़ देते हैं। तेंदुये एवं अन्य वन्य प्राणी इनमें गिर जाते हैं। अतः कुओं व टैंकों पर पेरापेट दीवार बनाना चाहिये। यदि कुयें की आन्तरिक दीवार से कोई पत्थर बाहर निकलता हुआ हो या कोई लकड़ी तैर रही हो तो तेंदुआ उस पर बैठ कर अपने को पानी में डूबने से बचाता है, यदि कोई टेक मिल जाती है तो उस पर से वह बाहर निकलने के सफल-असफल प्रयासों के रूप में छलांगें भी लगाता है। दीवार पर पकड़ बनाने के प्रयास में वह बार-बार दीवार पर पंजों से प्रहार भी करता है जिससे नाखूनों के निशान दीवार पर उभर आते हैं।

बचाव हेतु दीवार पर बार-बार पंजे मारने से अगले पैरों के नाखून, अंगुलियाँ एवं तलुओं के पैड क्षतिग्रस्त भी हो जाते हैं। यदि कुआँ सूखा है तो डूबने का कोई खतरा नहीं रहता परन्तु अधिक गहरा हो तो कई बार घायल होने की संभावना बन जाती है। आजकल राजस्थान में भूगर्भीय जल-स्तर नीचे जाने से काफी कुंए सूख चुके हैं। ये सूखे कुएं हॉलाकि गर्मियों व सर्दियों में भले ही निरापद रहें लेकिन वर्षा में अस्थाई तौर पर इनमें पानी आ जाता है तथा ये जानलेवा साबित हो जाते हैं। कई पानी वाले कुंओं में विद्युत मोटर या डीजल पम्प सेट लगे होते हैं। गिरने वाले तेंदुये इन पम्पों पर उपलब्ध स्थान को जान बचाने हेतु उपयोग में लाते हैं। कई बार विद्युत मोटरों के खुले तार भी उनके लिये खतरा साबित हो सकते हैं। कुंओं में बचाव हेतु उतरने वाले दल को कुंए की विद्युत आपूर्ति बन्द कर ही बचाव प्रारम्भ करना चाहिये।

राजस्थान में तेंदुओं की अधिकांश दुर्घटनायें कुंओं में गिरने से होती हैं। गहरे कुंओं में अंधेरा भी एक समस्या होती है अतः टार्च या सर्च लाइट आदि प्रकाश व्यवस्था साथ में रखना चाहिये।

बचाव कार्य : कुछ क्षेत्र अनुभव
(Rescue operations : Few Field Experiences)

प्रकरण 1

यह प्रकरण डूंगरपुर जिले का है। एक तेंदुये के सूखे कुंए में गिरने की सूचना मिलने पर डूंगरपुर वनमण्डल स्टाफ ने बचाव कार्य प्रारम्भ किया। तेंदुआ निकलने हेतु अनेक बार बीस फुट से ऊँची छलाँगें लगा चुका था, लेकिन अधिक गहराई के कारण बाहर नहीं निकल पाया।

एक लकड़ी की सीढ़ी बना कर कुएँ में तिरछी अवस्था में उसी तरह रख दी गई जैसे किसी घर की छत पर चढ़ने हेतु लकड़ी की सीढ़ी लगाते हैं। बचाव दल काफी दूर हट गया तथा तमाशबीन समस्त लोगों की भीड़ को दूर हटा कर व्यवधान को न्यूनतम कर दिया। काफी इन्तजार के बाद भी तेंदुआ बाहर नहीं आया। बचाव दल ने पुनः कुएँ का मुआयना किया तो पाया कि तेंदुये के चढ़ने के प्रयासों में सीढ़ी टूट गई थी तथा सीढ़ी के एक टुकड़े के शीर्ष पर तेंदुआ बैठा था। पुनः

एक मजबूत सीढ़ी बना कर कुंए में रक्खी गई। तब तक कुछ अँधेरा भी होने लगा था। कुछ देर बाद ही सीढ़ी पर चढ़ता हुआ तेंदुआ बाहर आया और जंगल में चला गया।

इस प्रकरण में सीढ़ी की वजह से बचाव कार्य में कुछ व्यवधान पड़ा। हमें सीढ़ी ऐसी मजबूत बनानी चाहिये जो 50 किग्रा तक वजन वाली मादा या 68 किग्रा वजन वाले नर के भार को सह सके। चूँकि यह प्राणी के डंडों को छलांग लगाने हेतु एक आधार की तरह भी काम ले सकता है अतः सीढ़ी की मजबूती तेंदुयें के वास्तविक वजन की अपेक्षा छलांग को सहने वाली बनाई जानी चाहिये। सीढ़ी को बनाने में कीलों व तार आदि का सावधानी से उपयोग किया जाना चाहिये। उभरी हुई कीलें एवं तार प्राणी को घायल कर सकती हैं अतः मजबूत रस्सी से क्षैतिज डंडों को बांधा जाना अधिक सुरक्षति है।

प्रकरण 2

यह बचाव प्रकरण उदयपुर संभाग का है जो चिड़ियाघर, उदयपुर स्टॉफ की देख-रेख में सम्पन्न हुआ। जिस कुएँ में तेंदुआ गिरा उसमें थोड़ा सा पानी था तथा उसमें बड़े-बड़े पत्थर भी पड़े हुए थे। तेंदुआ एक पत्थर पर बैठ कर पानी में डूबने से अपने को बचाता रहा। बचाव दल के एक सदस्य की कमर पर रस्सा बांध कर उसे कुएं में धीरे-धीरे बाल्टी की तरह उतारा गया। एक दूसरा रस्सा इस सदस्य के एक हाथ से पृथक से दे दिया गया ताकि उसकी मदद से वह अपना पोस्चर जरूरत अनुसार बना सके। कमर एवं हाथ वाले रस्सों को सुरक्षित बाहर वृक्षों से बांधकर रखा गया तथा पर्याप्त आदमियों की मदद से कुएँ में उतरे आदमी को ऊपर-नीचे खींचने की व्यवस्था की गई। कुएँ में जब आदमी की तेंदुए से दूरी लगभग 10 मी. रह गई, उसे वहाँ रोक लिया गया।

पूर्व में तेंदुये की छलांगों को देख सुरक्षित दूरी का चयन कर लिया गया। अब एक सरकने वाला, रस्से से बना फन्दा कुएं में उतरे आदमी ने बांस की मदद से एवं फंदे को झुलाते हुए तेंदुयें की गर्दन में डाला। एक लम्बे बांस से फन्दे को अगले एक पैर में जनेऊ की तरह डालने की सफलता कुछ प्रयासों में हासिल हो गई। रस्से को कुछ खींच, फन्दे को कुछ कस लिया। तेंदुआ मुँह से रस्से को काटने का प्रयास भी करता था एवं गले की तरफ आते हुए फन्दे को हाथ से बार-बार फटक कर दूर भी हटा देता था। कुएं में लटके आदमी को शीघ्रता से बाहर निकाला गया, फिर तेंदुये को बाहर खींच कर पिंजरे की सलाखों में से रस्सी को लेकर खींचते हुये उसे पिंजरे में डाल दिया गया। प्राणी स्वस्थ था अतः उसे सुरक्षित वन में छोड़ दिया गया।

इस प्रकरण में गर्दन के साथ एक हाथ (पैर) को भी फन्दे में लेना बहुत ज़रूरी था। अकेले गर्दन में फन्दा डालने से दम घुटने से प्राणी की मौत हो सकती थी। कई बार मजबूती को ध्यान में रखते हुए बहुत मोटा रस्सा फंदा बनाने में काम में ले लिया जाता है। मोटे रस्से की गांठ तुरन्त नहीं सरकती है तथा समय पाकर फंदे में आया हुआ तेंदुआ अपने आप को फंदे से मुक्त कर लेता है। अतः नाइलोन का कम मोटाई का रस्सा फंदा बनाने में काम में लेना चाहिये।

प्रकरण 3

यह प्रकरण गाँव सिल्लाखेड़ी, नागौर जिले का है। तेंदुआ लगभग 16 फुट ऊँचे खेजड़ी के वृक्ष में चढ़ छत्रक में घुस कर बैठ गया। चिड़ियाघर जयपुर का स्टाफ बचाव कार्य में लगा हुआ था। रात को जीप एवं सर्च लाईट की रोशनी में ट्रेंक्वीलाइजिंग गन से बेहोशी का इन्जेक्शन लगाया गया। तेंदुआ निरंतर वृक्ष के छत्रक में ही छुपा रहा तथा वहीं बेहोश हो गया। एक लम्बे बांस से तेंदुये को छेड़कर देखा गया था कि वह होश में है या बेहोश। परन्तु छेड़ने पर कोई हलचल नहीं होने पर तय हो गया कि तेंदुआ बेहोश है। तुरन्त ही रस्से का एक फन्दा बना कर तेंदुये की छाती पर डाल दिया एवं वृक्ष के नीचे लटका कर पिंजरे में डाल दिया गया।

जिस वृक्ष पर तेंदुआ चढ़ा था वहाँ आस-पास रेगिस्तान था तथा सघन वनस्पति नहीं थी। अतः बेहोशी का इन्जेक्शन लगाने के बाद भी तेंदुये को छुपने के लिये कहीं वानस्पतिक आवरण (Vegetal Cover) नजर* नहीं आ रहा था। अतः उसने अपने आप को वृक्ष के छत्रक में ही छुपाये रखा। यदि इन्जेक्शन लगते ही वह गुस्से में उतर कर/छलांग लगा कर नीचे आकर भागता तो हो सकता था आवरण में छुपने की प्रवृत्ति के कारण पास के किसी दूसरे वृक्ष में चढ़ कर उसके छत्रक में पुनः घुस जाता या कोई आस-पास घर होता तो उसमें भी घुस सकता था।

प्रकरण 4

जयपुर शहर में काफी अन्दर ''वाटिका रेस्टोरेन्ट'' की फूलों हेतु लगाई बेलों व झाड़ियों के आवरण में एक छोटे तेंदुए के घुसे होने की सूचना मिलते ही चिड़ियाघर जयपुर का स्टाफ बचाव कार्य हेतु पहुँचा। चारों तरफ से परकोटे पर एक सुविधाजनक स्थल से, जहाँ से बेहोशी का इन्जेक्शन ट्रेंक्वीलाइजिंग गन से लगाना अपेक्षाकृत ज्यादा आसान था, उसका चयन किया गया। कवर में छुपे तेंदुये को छेड़ा नहीं गया ताकि वह अपनी स्थिति को बदल न ले। बेहोशी का इन्जेक्शन वांछित निशाने पर लगा। जब यह विश्वास हो गया कि तेंदुआ अच्छी तरह बेहोश हो चुका है, उसे जाल में लपेट कर तुरन्त चिड़ियाघर जयपुर ले जाया गया। चूँकि तेंदुये को जाल में ठीक से लपेट दिया गया था तथा परिवहन लगभग 5 किमी. दूर स्थित चिड़ियाघर तक करना था, तब तक तेंदुये के होश में आने की संभावना नहीं थी अतः परिवहन के दौरान उसे पिंजरे में नहीं डाला गया।

तेंदुये को जीवित पकड़ने हेतु वन विभाग पिंजरे, रस्से, टाट, हैलमेट, जाल, बेहोशी की दवा, होश में लाने की दवा, प्रकाश व्यवस्था, पशु चिकित्सक आदि सभी जरूरी आवश्यकताओं से सुसज्जित था। सुरक्षा पहलुओं को ध्यान में रख कर हथियारबंद पुलिस बल मौके पर तैनात था। वन अधिकारियों ने पुलिस बल को समझा दिया था कि हड़बहाड़ट में प्राणी को गोली न मारे। गोली मारने का विकल्प वैसे भी अंतिम ही होना चाहिये। वन अधिकारियों एवं पुलिस ने तमाशबीन भीड़ को भी नियंत्रित कर दूर-दूर तक हटा दिया ताकि बेहोशी का इन्जेक्शन लगने पर उत्तेजित तेंदुआ कोई जनहानि न कर दे।

---

* बिल्लियाँ रात्रि में भी अच्छी तरह देख सकती हैं।

प्रकरण 5

यह प्रकरण गीजगढ़ (अलवर) का है। चिड़ियाघर जयपुर का स्टाफ बचाव कार्य में लगाया गया। एक चारपाई को दो तरफ से बांध कर उसका एक झूला (या मचान) बना कर उस पर दो कुशल फन्दा फेंकने वालों को बिठा कर धीरे-धीरे चारपाई कुएं में उतारी गई। कुएं में पानी भी था तथा प्राणी तैर कर थक चुका था। सावधानी से रस्से का एक फन्दा बनाकर चारपाई पर बैठे एक व्यक्ति ने तेंदुये के पिछले एक पैर में डालने में सफलता प्राप्त कर ली। चारपाई की एक बगल से पिंजरे को रस्सी से बांध कर कुएं में पानी के स्तर तक उतारा गया। पानी में ही पिंजरे की गति करवा कर पिंजरे का मुंह तेंदुये के सामने लाया गया। थका हुआ तेंदुआ स्वयं पिंजरे में घुस गया। यदि वह अन्दर नहीं घुसता तो पैर में बंधी रस्सी को पिंजरे में पिरो कर फिर उसे पिंजरे में घसीटा जाता।

प्रकरण 6

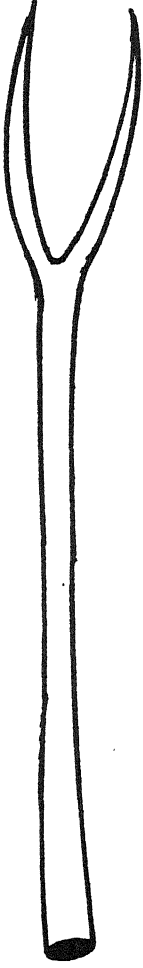
दूदू कस्बे (जिला जयपुर) में पास नरैना गाँव में एक पक्के घर में तेंदुआ घुस गया। सुरक्षा हेतु गाँव वालों ने कमरे का दरवाजा बाहर से बन्द कर दिया। चिड़ियाघर जयपुर का स्टाफ बचाव कार्य में लगाया गया। एक सीढ़ी लगा कर पहले आंशिक रूप से कमरे का एक रोशनदान तोड़ा गया। रोशनदान से ट्रेंक्वीलाइजिंग गन से तेंदुये को बेहोश कर पिंजरे में डाला गया।

प्रकरण 7

जयपुर शहर के रंजीतनगर में तेंदुआ घुस गया। चिड़ियाघर जयपुर का बचाव दल तेंदुआ पकड़ने हेतु कार्य पर लगाया गया। तेंदुआ एक घर के अहाते में फूलों की झाड़ियों व बेलों के नीचे छुपा बैठा था। चारों तरफ लोगों की शोर मचाती भीड़ थी एवं पुलिस बल तैनात था। भीड़ को वहाँ से हटाया गया तथा जंगल को जाने वाली सड़क से भी भीड़ हटवाई गई। लोग छतों पर चढ़ गये। पुलिस बल को कहा गया कि वे सड़क पर खड़े न रहें तथा सड़क के दोनों किनारे बने घरों की दीवारों से एकदम सट कर खड़े हो जायें एवं सड़क को पूरी तरह खाली रखें ताकि बेहोशी का इन्जेक्शन लगने पर तेंदुआ भागने की कोशिश करे तो खाली सड़क पर दौड़ता रहे एवं किसी पर आक्रमण न करे। पुलिस को यह भी कहा गया कि वन विभाग के बिना निर्देश के गोली न चलाई जाये। तत्पश्चात् घर के एक ऐसे कमरे का चयन किया गया जिसकी खिड़की से तेंदुआ सामने पड़ता था। खिड़की पर जाली थी। धीरे-धीरे जाली में छेद किया गया। तेंदुआ घबराहट में अभी भी यथास्थिति छुपा रहा। जाली के छेद में से तेंदुये के शरीर के सुरक्षित स्थान (पुट्ठे) पर बेहोशी की डार्ट मारी गई। तेंदुआ डार्ट खाकर भी कवर में ही छुपा रहा। बेहोश होने पर उसे जीवित पकड़ लिया गया।

बेहोशी का इंजेक्शन लगते ही प्रायः तेंदुआ अत्यधिक आक्रामक/उत्तेजित हो जाता है लेकिन यहाँ तेंदुये ने अपने स्वभाव के एकदम विपरीत व्यवहार का प्रदर्शन किया। अलग-अलग परिस्थितियों में तेंदुयें अलग-अलग व्यवहार प्रदर्शित कर सकते हैं।

प्रकरण 8

माउन्ट आबू क्षेत्र में काचोनी गाँव में एक कुएँ में तेंदुआ गिर गया। माउन्ट आबू पर्वत वन्य जीव अभयारणय की टीम एवं गुजरात स्टेट माउन्टेनियरिंग के सदस्यों ने बचाव कार्य सम्पन्न किया।

चित्र 1 जई

गीली मिट्टी के छोटे-छोटे लड्डू बना कर तेंदुये पर फेंक कर उसकी इधर-उधर गति कराई गई ताकि फन्दे डालने हेतु वह मौका दे। गति हेतु मजबूर न करने पर वह छुप कर बैठने का प्रयास करता था। गीली मिट्टी फेंकने से जानवर को कोई चोट नहीं आती है। यदि इस की जगह पत्थर का प्रयोग किया जाता तो जानवर घायल हो सकता था। तेंदुये के एक अगले पैर में रस्से से बना फन्दा डाला गया। अगले पैर की तिर्यक रेखा पर स्थित पिछले पैर से भी इसी तरह एक दूसरा फन्दा डाला गया। इस तरह आमने-सामने के (तिरछी दिशा में) दो पैर अलग-अलग दो फंदों में फंसा लिये गये। अलग-अलग दिशा के रस्से खींच कर उसे बाहर निकाला गया तथा बाहर आने पर भी रस्सों को अलग-अलग दिशा में खींच कर ही रखा गया। अब चारपाई उसके ऊपर डाल उसे बांध कर काबू कर लिया गया। चारपाई न होने पर जाल, टाट, दरी में भी उसे बाँधा जा सकता था। इस विधि से माउन्ट बाबू स्टाफ ने जरख, रटेल आदि का भी बचाव किया है। जरख मजबूत जबड़ों से रस्से को काट देता है अतः उचित ध्यान देना चाहिये। रटेल आकार में छोटा होता है अतः टाट की बोरी में उसे बन्द कर सुरक्षित पकड़ा/परिवहन किया जा सकता है।

कुएँ से निकाल कर तेंदुये को पिंजरे में रखा गया तथा माउन्ट आबू अभयारण्य में छोड़ा गया। छोड़ने के समय तेंदुये ने पिंजरे से निकलने से इनकार कर दिया। एक बांस से छेड़-छाड़ कर उसे बाहर निकलने को मजबूर किया गया तो वह एक बार निकलकर पुनः पिंजरे में वापिस आ गया। लकड़ी से उसे छेड़ते हुये पुनः निकाला गया तो वह निकल कर जंगल में ओझल हो गया।

प्रकरण 9

कुंभलगढ़ अभयारण्य (जिला राजसमंद, पाली एवं उदयपुर) में कांकरवा गाँव के पास एक के बाद एक श्रेणीबद्ध उभरे हुये पत्थर लगा कर कुएं में उतरने हेतु इनका सीढ़ी के रूप में उपयोग

होता था। एक बार दो तेंदुये इन पत्थरों को सीढ़ियों की तरह उपयोग करते हुये कुएँ में पानी पीने पहुँचे। देखे जाने पर लोगों ने शोर शराबा मचाते हुये कुएं को घेर लिया। तेंदुये अन्दर कुएं में छुपे रहे तथा बाहर नहीं निकले। कुम्भलगढ़ अभयारण्य के स्टाफ ने तुरन्त मौके पर पहुँच कर भीड़ को हटाया। तब तक दिन भी अस्त हो गया। थोड़ी देर बाद तेंदुये स्वयं ही निकल कर जंगल में चले गये।

यदि तेंदुओं को निकालने की गुंजाइश हो तो ऐसी स्थिति में उन्हें अपने आप निकलने का मौका देना चाहिये तथा लोगों की भीड़ को पूरी तरह से हटा देना चाहिये।

प्रकरण 10

धरियावद क्षेत्र में एक छोटा तेंदुआ नहर में बह रहा था। गाँव वालों ने उस पर बोरी डाल कर उसे पकड़ा एवं बाहर निकाल कर सीतामाता अभयारण्य के स्टाफ को सौंप दिया। अभयारण्य स्टाफ ने प्राणी को उदयपुर भिजवा दिया। प्राणी का उपचार पशु चिकित्सक से करवाया गया। स्वास्थ्य में सुधार को देखते हुए उसे चिड़ियाघर उदयपुर से हटाकर धरियावद के जंगलों में स्वतंत्र छोड़ दिया गया। कुछ दिन बाद तेंदुआ मृत मिला।

प्रकरण 11

उदयपुर की झाड़ोल तहसील में नाल सान्डोल वन खण्ड में सड़क पर उपखण्ड अधिकारी को एक किशोर तेंदुआ (संभवतः घायल) मिला। उपखण्ड अधिकारी उपचार हेतु उसे पशु झाड़ोल ले आये एवं चिकित्सकों से इलाज प्रारंभ करवा दिया। लोगों की भीड़ तेंदुये को देखने जुट गई। कुछ लोगों ने उसे गोदी में उठा कर फोटो भी खिंचवाये। फ्लैशों की चकाचौंध एवं लोगों की भीड़ से तेंदुआ घबराया रहा। बीमारी एवं संभवतः स्ट्रेस से उसकी मृत्यु हो गई।

हाल ही पकड़े गये वन्य प्राणी आदमी की निरंतर समीपता से बहुत घबराते हैं एवं स्ट्रेस महसूस करते हैं। अतः पकड़े गये प्राणी को कभी भी नुमाइश की चीज नहीं बनने देना चाहिये बल्कि उसे बिलकुल एकांत में रखा जाना चाहिये। लोगों की भीड़ से उत्तेजित वह पिंजरे में उछल कूद कर स्वयं भी घायल हो जाता है। पकड़ा प्राणी यदि बीमार है तो उसका उचित उपचार प्रशिक्षित चिकित्सक की देखरेख में किया जाना चाहिये। बंदी अवस्था में भोजन, पानी एवं आराम की पूर्ण व्यवस्था होनी चाहिये। सर्दी-गर्मी-वर्षा से बचाव की भी पूर्ण व्यवस्था जरूरी है। यदि प्राणी बीमार नहीं है तो प्राकृतिक आवास में उसे अविलम्ब मुक्त करके उसका पुनर्वास कर देना चाहिये। प्राणी को जंगल की परिधि की बजाय कुछ अन्दर जाकर मुक्त किया जाना चाहिये।

प्रकरण 12

नाना बेड़ा (पाली जिला) गाँव में एक 20 फुट गहरे कुएं में तेंदुये का एक बच्चा गिर गया। पानी में एक 5 फुट लम्बी लकड़ी तैर रही थी। तेंदुआ इसी लकड़ी पर बैठ कर डूबने से बचा हुआ

था। मादा तेंदुआ बच्चे की वजह से बार-बार दिन भर पास में बोलती रही। उदयपुर उपमुख्य वन्य जीव प्रतिपालक कार्यालय का स्टाफ बचाव कार्य हेतु नियुक्त था। एक व्यक्ति की कमर में रस्सी बांध उसे कुएं में उतारा गया। आधे कुएं में पहुँच बांस की मदद से रस्से का एक फन्दा कुछ प्रयासों के बाद गले व एक पैर में डाला गया। रात्रि का समय था। सर्चलाईट तेंदुये की आँखों पर इस दौरान डाली गई ताकि कुएं में प्रकाश रहे एवं चकाचौंध में तेंदुआ कुछ देख भी न सके। तेंदुये को खींचकर, पिंजरे में रस्सी लेकर खींचते हुये उसे अन्दर डाल दिया। बच्चा स्वस्थ था अतः पिंजरे को केंटर में रख कर उसकी माँ जहाँ दिन में बोल रही थी उस स्थान पर उसे मुक्त कर दिया। पिंजरा वाहन में लोड रखा पिंजरे पर एक आदमी ने खड़े होकर स्लाइडिंग गेट को ऊपर खींच लिया। तेंदुआ नीचे कूद कर चला गया।

प्रकरण 13

खरका गाँव के पास बांग तलाई गांव (उदयपुर जिला) में एक तेंदुआ गांव में घुस गया। लोगों की भीड़ ने चारों तरफ से गाँव को घेर लिया। तेंदुआ गांव में छुप गया तथा भाग नहीं सका। सूचना मिलते ही उदयपुर वन्यजीव संभाग का स्टाफ मौके पर पहुँचा। मौके पर पहुँचते ही वनकर्मियों ने एक नाले की तरफ से लोगों का घेरा हटा दिया। तेंदुआ नाले में भागने लगा। नाले की कीचड़ में उसके पैर धँसने लगे फलतः उसकी गति काफी कम हो गई। एक दुफंके कृषि औजार जई (चित्र 1) से एक वन रक्षक ने हिम्मत कर सटीक निशाना साधा तथा दुफंके के बीच तेंदुये की गर्दन फंसा कर जई को गीली जमीन में धँसा दिया। जानवर की गर्दन दुफंके में आते ही वह रुक गया। तुरन्त उसे बेहोशी का इन्जेक्शन डार्ट कर दिया गया एवं चारों पैर बांध कर उसे काबू में किया गया। उसे गुलाबबाग चिड़ियाघर के एक पिंजरे में रखा गया। डॉक्टर ने परीक्षण किया। जानवर स्वस्थ था। उसके पिंजरे के केंटर पर लाद कर शाम को जयसमंद अभयारण्य में छोड़ने हेतु ले जाया गया। उसकी दहाड़ सुन कर जंगल से भी एक दूसरे तेंदुये का प्रत्युत्तर सुनाई देने लगा। केंटर पर रखे पिंजरे का स्लाइड गेट खोला गया तो जानवर निकलने की बजाये पिंजरे में ही छुपा रहा। उसे लकड़ी के घूँसे मार कर बाहर खदेड़ा गया।

प्रकरण 14

उदयपुर जिले के केशरिया कस्बे के पास थाना गांव में प्रातः एक तेंदुआ नदी पार कर रहा था। लोगों द्वारा देखे जाने पर हो-हल्ला मचाने के कारण घबरा कर तेंदुआ भाग कर मक्की की कड़ब के ढेर में घुस गया। भीड़ ने कड़ब को घेरे में ले लिया। वन विभाग के बचाल दल ने मौके पर पहुँच कर कड़ब को एक तरफ से हटाना शुरू किया। घबरा कर तेंदुये ने स्प्रिंग की तरह छलांग लगाई एवं पहाड़ी पर चढ़ गया। सामने थूर (*Euphobia neriifolia*) की बाड़ थी। वह उसमें से जगह बना कर आगे भागने लगा। सामने से भी तमाशबीन लोगों का एक झुण्ड आ रहा था। उनके शोर मचाने पर घबरा कर वह दूसरी तरफ भागा। वह जिधर जाता उधर ही आदमियों की भीड़ खड़ी मिलती। भीड़ में एक आदमी ने अनावश्यक बहादुरी दिखाई तथा वन कर्मियों के मना

करने के बावजूद तेंदुये के अधिक पास पहुँच गया। तेंदुये ने उसकी खोपड़ी पर बिजली की गति के लपक कर प्रहार कर उसे घायल कर दिया तथा वापिस गांव की तरफ भागने लगा। गाँव में वह पानी की एक टंकी के पास छुप गया। वन कर्मियों ने बिना जाल अचानक उसे दबोच कर उसके हाथ-पैर बाँध उसे पिंजरे में डाल कर गुलाबबाग चिड़ियाघर ले आये। वह आज भी चिड़िया घर में जीवित है।

आम आदमी तेंदुओं की चपलता का कम ही ज्ञान रखते हैं। छेड़े जाने पर भीड़ में लापरवाह खड़े या बहुत पास उपस्थित व्यक्ति पर जिस तेजी से बिजली की गति से तेंदुआ आक्रमण करता है वह अद्भुत है। वस्तुतः भीड़ उसे बकरी के बच्चे की तरह समझ कर उसे मनोरंजन का साधन बनाने की गलती करती है।

यदि बार-बार उसका रास्ता रोकने की बजाय उसे एक तरफ से शांति से निकलने दिया जाये तो वह जंगल में चला जायेगा तथा जनहानि नहीं होगी।

प्रकरण 15

अलवर जिले में कुएं में एक तेंदुआ गिर गया। जयपुर चिड़ियाघर की टीम उसे निकालने गई। कुएं पर चारों तरफ मुंडेर (पेरापिट दीवार) भी बनी थी। एक तरफ से मुडेर को भूमि तल तक तुड़वा कर सामने सटा कर पिंजरा रखवा दिया गया तथा कुएं पर टीन ढक दी गई ताकि निकलने का एक ही रास्ता (टूटी हुई मुंडेर) रहे। कुएं में एक सीढ़ी भी रख दी गई। रात्रि को टूटी मुंडेर की तरफ 100 मीटर दूर एक पेट्रोमेक्स रखा गया ताकि टूटी मुडेर की तरफ से कुछ रोशनी कुएं में जा सके। तेंदुआ सीढ़ी चढ़ता हुआ प्रकाश की दिशा में रखे पिंजरे में जैसे ही घुसा, पास में छुपे व्यक्ति ने तुरन्त स्लाइडिंग गेट गिरा कर उसे बन्द कर दिया।

कई बार जन धन की हानि करने वाले तेंदुओं को पकड़ कर चिड़ियाघर ले जाना पड़ता है क्योंकि उन्हें मुक्त करने पर भारी जन आक्रोश का सामना करना पड़ता है। यहाँ उत्पात मचाने वाले एक तेंदुये को पकड़ने की रणनीति बनाई गई जो सफल रही।

प्रकरण 16

अलवर जिला कलेक्टर के निवास में खड़े हुए नीम वृक्ष पर रात में जंगल से भटक कर आया एक तेंदुआ चढ़ गया। सुबह भारी भीड़ जानवर को देखने के लिये सड़क पर जमा हो गई। जानवर को नीचे उतारने एवं पकड़ने के सभी प्रयास विफल हो गये। घटनास्थल से जंगल बहुत दूर था। उसे यदि जंगल की तरफ किसी तरह मोड़ भी दिया जाता तो जंगल तक जाते-जाते भीड़ भरी सड़कों पर अनहोनी की पूरी आशंका बनी हुई थी। बेहोशी का इंजेक्शन लगने की स्थिति में वह अनियंत्रित भीड़ में भारी जनहानि कर सकता था। अंत में जिला प्रशासन को वन विभाग से सलाह कर तेंदुये को न चाहते हुये भी गोली मारने का निर्णय लेना पड़ा एवं बचाव अभियान असफल

रहा। ऐसा ही एक प्रकरण अलवर जिले में हरसोरा गांव में भी घटित हुआ जहाँ तेंदुये को गोली मारनी पड़ी।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक श्री आर. सी. सोनी, श्री एम. एल. दायमा, श्री यू. एम. सहाय, श्री एम. एल. मीणा, श्री आर. के. ग्रोवर, श्री मनीराम पूनिया, श्री ओ. सी. चन्देल, श्री आर. एस. शेखावत, श्री राहुल भटनागर, श्री वी. एस. राणा, श्री भोपालसिंह राठौड़, श्री कुमार स्वामी गुप्ता, श्री पी. एस. चुण्डावत, श्री रामाअवतार शर्मा, श्री के. के. शर्मा का आभारी है जिनसे प्रेरणा एवं मार्गदर्शन हमेशा प्राप्त हुआ। लेखक श्री हरेन्द्रसिंह सोलंकी, श्री फतेहसिंह राठौड़, श्री किरण भाई, श्री लालसिंह, श्री सदाशिव तिवारी, श्री सत्यनामसिंह, श्री चिरंजीलाल शर्मा, श्री जगन्नाथ पहाड़िया, श्री मंगल का आभारी है जिनके सहयोग से विभिन्न घटनाओं की जानकारी प्राप्त हुई।

(क्रमशः)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 3, July 2002.

भारत में कृषि विकास

निशा मिश्रा
वनस्पति विज्ञान विभाग, दीन दयाल उपाध्याय गोरखपुर विश्वविद्यालय, गोरखपुर (उ० प्र०)

[प्राप्त — मार्च 18, 2002]

सारांश

अंग्रेजों के आने के पूर्व से भारत की अर्थव्यवस्था में कृषि का अत्यन्त महत्त्वपूर्ण स्थान रहा है परन्तु इनके आने के पश्चात् खाद्यान्नों का उत्पादन घट गया था। स्वतंत्रता मिलने के पश्चात् अविभाजित भारत का प्रमुख गेहूँ उत्पादक क्षेत्र तथा धान का अधिक उत्पादक क्षेत्र पाकिस्तान में चला गया। खाद्यान्न की कमी होने के कारण प्रथम पंचवर्षीय योजना में कृषि को सबसे अधिक महत्व दिया गया।

भारत के कृषि विकास में हरित क्रान्ति (इंटेन्सिव एग्रीकल्चरल डिस्ट्रिक्ट प्रोग्राम, उच्च पैदावार वाली किस्मों का प्रोग्राम, कृषि ऋण, न्यूनतम समर्थन मूल्य, विशेष खाद्यान्न उत्पादन प्रोग्राम, बौनी किस्में, बौना करने वाले जीन, संकर किस्में), उन्नत बीज, उर्वरक, कीटनाशी रसायन, सिंचाई, विपणन, तिलहन तकनीकी मिशन महत्त्वपूर्ण रहे हैं। हरित क्रान्ति के कुछ अवांछनीय प्रभाव भी रहे हैं।

देश में कृषि अनुसंधान को बढ़ावा देने तथा उसे समन्वित करने के उद्देश्य से कई शोध संस्थानों की स्थापना की गई।

Abstract

Development of agriculture in India. *By* Nisha Misra, Department of Botany, D.D.U. Gorakhpur University, Gorakhpur (U.P.).

Agriculture had importance in the Indian economy before the arrival of Britishers but the produce of food grains decreased after their arrival. After independence the main wheat producing area and more rice producing area went to Pakistan. Due to shortage of food grains agriculture was given prime importance in the first Five Year Plan.

Green revolution (Intensive Agricultural District Programme, High Yielding Varieties Programme, Agricultural Credit, Minimum Support Price, Special Price, Special Food Grains Production Programme, Dwarf Varieties), improved seeds, fertilizers, pesticides, irrigation, marketing, Oil Seed Technology Misson, White revolution and Dairy development Technology Missions have been important in the development of Indian agriculture. Green revolution had some bad effect.

Many research organisations have been established to promote and coordinate agricultural research in India.

भारत की अर्थव्यवस्था में कृषि का अत्यन्त महत्त्वपूर्ण स्थान है। देश की कुल जनसंख्या का लगभग 70 प्रतिशत कृषि एवं उससे संबंधित क्रियाकलापों पर निर्भर रहता है। कुल राष्ट्रीय आय का लगभग एकतिहाई भाग कृषि से आता है। अंग्रेजों के आने से पूर्व भारत खाद्यान्न (अनाज) उत्पादन में आत्मनिर्भर था किन्तु अंग्रेजों ने यहाँ के किसानों को कपास, जूट तथा नील जैसी नकदी फसलों को उगाने के लिए बाध्य किया क्योंकि ब्रिटेन के कारखानों में कच्चे माल के रूप में इन फसलों की आवश्यकता थी। इसके फलस्वरूप देश में खाद्यान्न का उत्पादन घट गया। स्वतंत्रता मिलने के साथ ही साथ देश का बँटवारा भी हो गया। अविभाजित भारत का प्रमुख गेहूँ उत्पादक क्षेत्र पश्चिमी पाकिस्तान में तथा धान का अधिक उत्पादक क्षेत्र पूर्वी पाकिस्तान (अब बंगला देश) में चला गया। भारत को अविभाजित देश की कुल आबादी का 82 प्रतिशत मिला परन्तु गेहूँ और धान के उत्पादक क्षेत्र का 75 प्रतिशत तथा कुल सिंचित क्षेत्र का केवल 69 प्रतिशत ही मिला। स्वतंत्र होते ही भारत को खाद्यान्न की अत्यधिक कमी का सामना करना पड़ा क्योंकि देश की बड़ी जनसंख्या को देखते हुए खाद्यान्न उत्पादन काफी कम था। इसी कारण से प्रथम पंचवर्षीय योजना में कृषि को सबसे अधिक महत्व दिया गया।

हरित क्रांति (Green Revolution)

देश को अनाज उत्पादन में आत्मनिर्भर बनाने के उद्देश्य से 1960-61 में चुने हुए 7 जिलों में कृषि में नई तकनीक का इस्तेमाल किया गया। इसे इंटेन्सिव एग्रीकल्चरल डिस्ट्रिक्ट प्रोग्राम (Intensive Agricultural District Programme) कहा गया। बाद में इस प्रोग्राम में उच्च पैदावार वाली किस्मों का प्रोग्राम (High Yielding Varieties Programme) भी जोड़ दिया गया और इसे पूरे देश में चलाया गया। इसके अन्तर्गत सर्वप्रथम 1963 में गेहूँ की उच्च पैदावार वाली बौनी किस्मों के बीज मेक्सिको से आयात किये गए। इन किस्मों को डॉ० नारमैन ई० बोरलॉग तथा उनके सहयोगियों ने विकसित किया था। धान की उच्च पैदावार वाली बौनी किस्मों के बीज सर्वप्रथम 1966 में फिलिपीन्स से मंगाए गए। इन आयातित किस्मों को भारत की जलवायु के अनुकूल बनाकर किसानों को बोने के लिए दे दिया गया। उच्च पैदावार वाली किस्मों के साथ-साथ अधिक सिंचाई, उर्वरकों एवं कीटनाशी दवाओं के समन्वित प्रयोग से खाद्यान्न के उत्पादन में अभूतपूर्व वृद्धि होने लगी। 1967-68 में, जब मानसून भी अनुकूल था, देश में खाद्यान्न का उत्पादन बढ़कर 9.5 करोड़ टन हो गया जो

पिछले किसी भी वर्ष के उत्पादन से अधिक था। भारत के साथ-साथ कई अन्य उष्णकटिबंधी (tropical) तथा उपोष्णकटिबंधी (suptropical) देशों में इसी तकनीक के प्रयोग से खाद्यान्न उत्पादन में प्रभावशाली बढ़त हुई है। 1968 में संयुक्त राज्य अमेरिका के कृषि विभाग के डॉ० विलियम गैड ने अनाज उत्पादन में हो रहे इस क्रांतिकारी परिवर्तन को ''हरित क्रांति'' का नाम दिया। भारत में हरित क्रांति का प्रादुर्भाव सही अर्थों में 1967-68 से ही हुआ है। हरित क्रांति के आने के बाद से भारत में खाद्यान्न की उपज में वृद्धि हो रही है, हालाँकि भारतीय खेती के मुख्यतः मानसून पर निर्भर होने के कारण उत्पादन में कुछ उतार-चढ़ाव होते रहते हैं। खेतों के लिए उत्तम बीज, सिंचाई के साधन, उर्वरक तथा कीटनाशी दवाओं की खरीद के लिए भारत सरकार ने किसानों को बैंकों तथा सहकारी वित्त संस्थाओं द्वारा कृषि ऋण (agricultural credit) देने की व्यवस्था की है। साथ ही किसानों को उनकी उपज का समुचित मूल्य दिलाने के लिए न्यूनतम समर्थन मूल्य (minimum support price) पर सरकारी एजेन्सियों द्वारा खाद्यान्न खरीदने की व्यवस्था भी की गई है। किसानों को इस प्रकार की सुविधाएँ प्राप्त हो जाने से भारत में हरित क्रांति को और बढ़ावा मिला है।

स्वतंत्र होने के समय से वर्ष 1999-2000 तक देश में 208.9 मिलियन टन खाद्यान्न का उत्पादन हुआ। देश अब खाद्यान्न उत्पादन में आत्मनिर्भर हो गया है। 1988-89 से देश में चुने हुए 169 जिलों में चलाए जा रहे विशेष खाद्यान्न उत्पादन प्रोग्राम (Special Foodgrains Production Programme) द्वारा 1989-90 में 18.5 करोड़ टन अनाज उत्पादन का लक्ष्य रखा गया। जैसे जैसे उत्पादन बढ़ा, भारत ने विदेशों से खाद्यान्न का आयात भी कम कर दिया गया। यह आयात 1967 के 87 लाख टन से घट कर 1972 में केवल 5 लाख टन ही रह गया। हाल में भारत से विदेशों को कुछ खाद्यान्न निर्यात भी किया गया है। अनाज के अतिरिक्त देश अब कपास तथा जूट उत्पादन में भी आत्मनिर्भर हो गया है।

फसलों की उन्नत किस्में

आधुनिक खेती में उच्च पैदावार वाली किस्मों की फसलों का बहुत अधिक महत्त्व है। हरित क्रांति के लाने में इन किस्मों का सबसे महत्त्वपूर्ण हाथ है। नई किस्मों का विकास वर्तमान किस्मों से संकरण (crossing) द्वारा किया जाता है। आधुनिक कृषि की एक अत्यन्त महत्तवपूर्ण उपलब्धि गेहूँ तथा धान की उच्च पैदावार वाली बौनी किस्मों (dwarf varieties) का विकास है। गेहूँ की बौनी किस्मों का विकास डॉ० नारमैन ई० बोरलॉग तथा उनके सहयोगियों द्वारा मेक्सिको के इन्टरनेशनल सेन्टर फॉर वीड ऐण्ड मेज़ इम्प्रूवमेन्ट में किया गया। उन्होंने बौना करने वाली जीन (dwarfing gene) के स्रोत के लिए गेहूँ की ''नारिन-10'' नामक जापानी किस्म का प्रयोग किया था। गेहूँ की उच्च पैदावार वाली नई किस्मों के विकास के लिए डॉ० बोरलॉग को 1970 में भारतीय कृषि अनुसंधान परिषद् (Indian Councial of Agricultural Research) ने आमन्त्रित किया जिन्होंने मेक्सिको से सोनोरा-64 तथा लर्मा राजो नामक गेहूँ की बौनी किस्मों को मंगाया। इन्हीं किस्मों से कल्याण सोना तथा सोनालिका नामक किस्में भारत में विकसित की गईं। एक दशक से भी अधिक समय तक भारत में गेहूँ की ये किस्में लोकप्रिय रहीं। भारत में अब अधिकांशतः गेहूँ की बौनी किस्में ही उगाई जाती

हैं। ये किस्में पर्याप्त मात्रा में सिंचाई, रासायनिक उर्वरक तथा खाद देने पर बहुत अधिक उपज देती हैं। उत्तर प्रदेश में बोई जाने वाली कुछ किस्में हैं– सोनालिका, कल्याण सोना, जनक, यू० पू० 264, प्रताप तथा शेखर।

धान की खेती में भी बौनी किस्मों के प्रयोग से क्रांति हो गई है। धान की उच्च पैदावार वाली बौनी किस्मों का विकास ताइवान में पाई जाने वाली बौनी किस्म ''डी. जिओ. वू. जेन.'' से किया गया है। 1966 में धान की दो उच्च पैदावार वाली बौनी किस्मों को भारत लाया गया। ये किस्में थीं ताइवान में विकसित ताइचुंग नेटिव-1 तथा फिलीपाइंस के राइस रिसर्च इंस्टीट्यूट में विकसित आई. आर.-8। कुछ वर्षों तक भारत में इनकी व्यापक रूप में खेती की गई, लेकिन बाद में भारत में ही विकसित अधिक अच्छी बौनी किस्मों को उगाया जाने लगा। उत्तर प्रदेश में बोई जाने वाली कुछ किस्में हैं आई. आर. 20, पूसा 2.21, साकेत 4, बाला, कावेरी, जया तथा नरेन्द्र-1।

कोयंबटूर के शुगरकेन ब्रीडिंग इंस्टीट्यूट में गन्ने की अनेक अधिक पैदावार वाली किस्मों का विकास किया गया है। इन किस्मों के पौधों में चीनी की मात्रा अधिक होती है तथा साथ ही साथ ये स्थानीय जलवायु के लिए भी अनुकूल हैं।

मक्का, ज्वार तथा बाजरा की उच्च पैदावार वाली संकर किस्मों (hybrid varieties) का विकास भी उल्लेखनीय है। 1957 में भारत की रॉकफेलर फाउन्डेशन के सहयोग से संकर मक्का के विकास के लिए एक विशेष कार्यक्रम आरम्भ किया गया। इससे संकर मक्के की कई किस्में प्राप्त हुईं जिन्हें खेती के लिए प्रयुक्त किया गया। ज्वार और बाजरा की भी संकर किस्म के पौधों से प्राप्त बीजों को बोने पर फसल अच्छी नहीं होती, अतः किसानों को प्रति वर्ष संकर किस्म के बीज खरीदने पड़ते हैं। यही कारण है कि ये किस्में प्रचलित नहीं हो पाईं, हालांकि कर्नाटक में संकर किस्मों की खेती काफी बड़े क्षेत्र में की जाती है। हाल में विकसित कम्पोजिट किस्मों (composite varieties) की उपज सामान्यतः संकर किस्मों के बराबर होती है, साथ ही किसानों को उनके बीज हर वर्ष खरीदने की आवश्यकता नहीं होती।

कपास, जूट, आलू आदि की भी अनेक उन्नत किस्मों का विकास किया गया है। दलहन तथा तिलहन फसलों के सुधार में अभी उतनी प्रगति नहीं हुई है जितनी गेहूँ और धान के विकास में हुई है। नई उन्नत तरीके से देखभाल द्वारा ही कृषि उत्पादों की लगातार बढ़ती हुई मांग को पूरा किया जा सकता है।

उन्नत बीज (Improved Seeds)

देश में कृषियोग्य भूमि का विस्तार लगभग अपनी सीमा तक पहुँच चुका है अतः पैदावार को प्रभावी ढंग से बढ़ाने के लिए प्रति हेक्टेयर अधिक उपज प्राप्त करना होगा। इस बात को ध्यान में रखते हुए खेतीयोग्य भूमि के अधिक से अधिक क्षेत्र में उच्च पैदावार वाली किस्में उगाने के प्रयास हो रहे हैं। अतः इन किस्मों के बीजों का अधिक से अधिक उत्पादन आवश्यक हो गया है।

उन्नत तथा प्रमाणित (certified) बीजों के उत्पादन एवं वितरण के लिए 1963 में नेशनल सीड्स कार्पोरेशन तथा 1969 में स्टेट फार्म्स कार्पोरेशन की स्थापना हुई। कुछ निजी उत्पादनकर्त्ता भी निर्धारित मापदण्डों के आधार पर उन्नत बीजों का उत्पादन एवं विक्रय कर रहे हैं। 1980-81 में लगभग 25 लाख क्विंटल उन्नत बीजों का वितरण किया गया था। 1985-86 में यह मात्रा बढ़कर 55 लाख क्विंटल हो गई। 1980-81 में 4.3 करोड़ हेक्टेयर क्षेत्र में उच्च पैदावार वाली किस्में उगाई गईं। 1997-98 में उन्नत बीजों के अधीन 760 लाख भूमि थी।

उर्वरक

कृषि उत्पादन बढ़ाने में रासायनिक उर्वरकों का बड़ा महत्त्व है। भारत में हरित क्रांति के आने में रासायनिक उर्वरकों का समुचित प्रयोग भी एक प्रमुख कारक रहा है क्योंकि उच्च पैदावार वाली किस्मों को साधारण किस्मों की तुलना में उर्वरकों की अधिक आवश्यकता होती है। भारत में उर्वरकों का उत्पादन 1960-61 में 1.5 लाख टन से बढ़कर 1980-81 में 30 लाख टन हो गया। 1987-88 में यह मात्रा बढ़कर 71 लाख टन हो गई। किन्तु यह देश में उर्वरकों की बढ़ती हुई मांग को पूरा करने के लिए पर्याप्त नहीं है। अतः विदेशों से भारी मात्रा में उर्वरकों का आयात करना पड़ता है। देश में रासायनिक उर्वरकों की कुल खपत 1960-61 में 2.92 लाख टन, 1980-81 में 55.20 लाख टन तथा 1987-88 में और बढ़कर 90.10 लाख टन हो गई। 1987-88 में 58.20 लाख टन नाइट्रोजन उर्वरक, 22.70 लाख टन फास्फेटिक उर्वरक तथा 9.20 लाख टन पोटैसिक उर्वरक का उपयोग हुआ।

कीटनाशी रसायन (Pesticides)

खेत में खड़ी फसलों तथा भण्डारगृह में रखे कृषि उत्पादों को चूहों, कीड़ों, कवकों (fungi) तथा जीवाणुओं (bacteria) के प्रकोप से बचाना आवश्यक होता है। इन जीवों के कारण कृषि उत्पादों की मात्रा एवं गुण दोनों ही प्रभावित होते हैं। इन जीवों को मारने अथवा नियंत्रण में रखने के लिए विविध प्रकार के विषाक्त रसायनों का प्रयोग किया जाता है जिन्हें कीटनाशी कहा जाता है। 1939 में डी. डी. टी. की खोज से रासायनिक कीटनाशकों के प्रयोग को काफी बढ़ावा मिला। भारत में उच्च पैदावार वाली किस्मों के प्रयोग के साथ-साथ कीटनाशकों का प्रयोग भी बढ़ गया। कृषि के महत्व के कीटों एवं रोगों के नियंत्रण के लिए एक केन्द्रीय योजना के अन्तर्गत कुछ चुनी हुई फसलों के लिए सहायता दी जा रही है। इसके अतिरिक्त अनेक कीटनाशी पदार्थों को उत्पादन शुल्क से मुक्त कर दिया गया है। निर्दिष्ट राज्य एवं सहकारी समितियों द्वारा चुने हुए कीटनाशकों के विदेशों के आयात पर कोई प्रतिबंध नहीं है। कुछ प्रमुख कीटनाशी हैं– डी. डी. टी., गामा-बी. एच. सी., एल्ड्रिन, हेप्टाक्लोर, पैराथिआन, डायाजिनॉन, मैलाथिआन, बेगॉन, एवं कार्बोफ्यूरान। इनमें से डी. डी. टी. प्रतिबन्धित है।

सिंचाई (Irrigation)

खेतों के लिए पानी अत्यंत महत्त्वपूर्ण है। बहुत कम वर्षा वाले क्षेत्रों, जैसे दक्षिण एवं मध्य

भारत, पंजाब तथा राजस्थान में सिंचाई आवश्यक होती है। कुछ क्षेत्रों में वर्षा तो काफी होती है परन्तु यह वर्ष की लघु अवधि में ही सीमित होती है, शेष समय में सूखा रहता है। ऐसे क्षेत्रों में सिंचाई की व्यवस्था कर वर्ष में एक से अधिक फ़सलें उगाई जा सकती है। धान और गन्ना जैसी फसलों के लिए पानी प्रचुर मात्रा में नियमित रूप से उपलब्ध होना चाहिए। अतः उपज बढ़ाने के लिए तथा अनिश्चित मौसम में भी अच्छी फसल पाने के लिए पर्याप्त मात्रा में पानी आवश्यक होता है।

देश में सिंचाई का क्षेत्र लगातार बढ़ रहा है। 1950-51 में केवल 2.26 करोड़ हेक्टेयर में सिंचाई होती थी। 1980-81 में सिंचाई की क्षमता 5.87 करोड़ हेक्टेयर हो गई। 1984-85 तक सिंचाई की क्षमता से वर्ष 1999-2000 तक देश की सृजित सिंचाई संभाव्यता लगभग 9.47 करोड़ हेक्टेयर तक पहुँच जाने का अनुमान है। भारत का कुल क्षेत्रफल 32.9 करोड़ हेक्टेयर है। इसमें से केवल 14.3 करोड़ हेक्टेयर में खेती होती है। पानी के सभी उपलब्ध साधनों का पूर्ण रूप से प्रयोग कर सन् 2010 तक सिंचाई की कुल क्षमता को 11.35 करोड़ हेक्टेयर तक बढ़ाने का लक्ष्य रखा गया है।

सिंचाई का 40 प्रतिशत भाग नहरों द्वारा होता है। नलकूपों से सिंचाई का तेजी से विकास हुआ। जिसमें बड़ी और मध्यम परियोजनाओं के अंतर्गत 35.3 मिलियन हेक्टेयर और लघु सिंचाई संभाव्यता के अन्तर्गत 59.4 मि० हे० सिंचाई क्षमता शामिल है।

कृषि ऋण (Agricultural Credit)

कृषि में नई वैज्ञानिक तकनीक के समावेश के साथ सरकार द्वारा किसानों को कृषिकार्यों के लिए ऋण देने की व्यवस्था भी की गई है। कृषि-भूमि, बीज, उर्वरक, कीटनाशी तथा कृषि मशीनरी जैसे ट्रैक्टर, थ्रेशर तथा पम्पिंग सेट खरीदने के लिए कम ब्याज पर ऋण दिये जाते हैं। ये ऋण सहकारी समितियों तथा वाणिज्य बैंकों अथवा ग्रामीण बैंकों द्वारा किये जाते हैं। 1950-51 में कृषि को केवल 24.2 करोड़ रु० का ऋण दिया गया था। 1987-88 में 7991 करोड़ रुपये का ऋण दिया गया। वित्तीय वर्ष 2001-02 के दौरान संस्थागत माध्यमों से कृषि क्षेत्र को 64000 करोड़ रुपये के ऋण प्राप्त होने का लक्ष्य पूर्ण होने की संभावना है। 2002-03 के दौरान संस्थागत माध्यमों से कृषि क्षेत्र को 75000 करोड़ रुपए के ऋण उपलब्ध कराने का लक्ष्य रखा गया है।

1982 में नाबार्ड (National Bank for Agricultural and Rural Development) की स्थापना हुई। कृषि ऋण वितरण के लिए यह बैंक राज्य सहकारी बैंकों को कम अवधि के लिए अग्रिम धनराशि देता है। बड़ी कृषि योजनाओं, जैसे बागानों एवं फलोद्यानों का विकास तथा मंहगी कृषि मशीनरी खरीदने के लिए भी इस बैंक से सहायता ली जा सकती है।

विपणन (Marketing)

पहले जब भी अनाज का उत्पादन अधिक हो जाता था तो बाजार में इसके बाहुल्य के फलस्वरूप

इसकी कीमतें इतनी गिर जाती थीं कि किसानों को उनकी मेहनत का कोई लाभ नहीं मिल पाता था। किसानों को उचित मूल्य दिलाने के लिए भारत सरकार अब आरम्भ में ही फसल का न्यूनतम समर्थन मूल्य (minimum support price) निर्धारित कर देती है। किसी फसल का बाज़ार में भाव सरकार द्वारा निर्धारित मूल्य से नीचे गिर जाने पर किसान अपनी फसल को सरकारी एजेन्सियों को न्यूनतम समर्थन मूल्य पर बेच सकते हैं। ऐसी दो प्रमुख सरकारी एजेन्सियाँ हैं– राष्ट्रीय कृषि विपणन संघ (NAFED) तथा भारतीय खाद्य निगम (F.C.I.)।

किसानों को उपज का उचित मूल्य दिलाने के लिए कृषि मंडियों को भी नियंत्रित किया गया है। इसके अतिरिक्त सहकारी विपणन समितियाँ किसानों की उपज को जमा करके तथा उसको मंडियों तक पहुँचाने में सहायता करती हैं।

हरित क्रान्ति के कुछ अवांछनीय प्रभाव

हरित क्रान्ति के फलस्वरूप जहाँ एक ओर भारत में कृषि उत्पादन में अभूतपूर्व वृद्धि हुई है, वहीं दूसरी ओर इसके कुछ अवांछनीय प्रभाव पड़े हैं, (1) केवल रासायनिक उर्वरकों के अत्यधिक प्रयोग करने तथा गोबर की खाद का प्रयोग न करने के फलस्वरूप मिट्टी के गुणों में ह्रास हो रहा है, (2) कीटनाशकों के अत्यधिक प्रयोग के कारण पर्यावरण के प्रदूषण की समस्या बढ़ी है तथा लाभप्रद जीवों, जैसे केचुओं, पर हानिकारक प्रभाव पड़ रहा है, (3) जहाँ नहरों से सिंचाई की जाती है वहाँ कुछ स्थानों पर नहरों से पानी के रिसाव के कारण निकटवर्ती खेतों में जलजमाव की समस्या है। ऐसी स्थिति पंजाब के कई स्थानों में हो गई है। इसके विपरीत, नलकूपों द्वारा अत्यधिक सिंचाई के फलस्वरूप कुछ स्थानों में भूमि के जल का स्तर बहुत नीचे चला गया है, (4) कृषि-ऋण, निवेश एवं विपणन की सुविधा का लाभ पढ़े-लिखे एवं बड़े किसानों को ही मिल पाता है, छोटे किसान प्रायः इन सुविधाओं के प्रयोग से वंचित रह जाते हैं। इससे आर्थिक असमानता बढ़ रही है, (5) बंजर एवं ऊबड़-खाबड़ भूमि को कृषियोग्य बनाने में तथा उन क्षेत्रों में जहाँ एक ही वर्ष में कई फसलें उगाई जाती हैं, किन्तु भारत जैसे सघन आबादी वाले देश में, जहाँ अधिकांश लोग कृषिकार्यों में संलग्न है, कृषि के अत्यधिक मशीनीकरण से ग्रामीण क्षेत्रों में बेरोजगारी की समस्या बढ़ी है।

तिलहन तकनीकी मिशन (Oilseeds Technology Mission)

भारत में तिलहन जैसे मूंगफली, सरसों, राई, तिल, अलसी, सूरजमुखी, अरंडी तथा सोयाबीन का उत्पादन आवश्यकता से काफी कम होता रहा है। विगत कई वर्षों में देश को खाने के तेलों तथा तिलहन का भारी मात्रा में आयात करना पड़ा है। भारत में तिलहन की खेती मुख्यतः असिंचित तथा सीमांत भूमि में होती है। समुचित फसल तकनीक का भी अभाव रहा है। हरित-क्रांति के फलस्वरूप अच्छी एवं सिंचित भूमि में किसानों द्वारा धान्य (cereals) की खेती को प्राथमिकता देने के कारण तिलहन की खेती उपेक्षित हो गई। मंहगे निवेश (inputs) जैसे बीज, उर्वरक, सिंचाई, कीटनाशी तथा उपज से कम लाभ प्राप्त होने के कारण भी किसान तिलहनों को कम बोते रहे हैं।

तिलहन का उत्पादन बढ़ाने तथा देश को तिलहन में आत्मनिर्भर बनाने के उद्देश्य से मई 1986 में तिलहन तकनीकी मिशन की स्थापना की गई। इस मिशन ने चार सूत्री नीति अपनाई :—

(क) फसल उत्पादन के लिए उपयुक्त आधुनिक तकनीकी का विकास।

(ख) इस तकनीक को निवेश एवं ऋण की सुविधा के साथ किसानों तक पहुँचाना।

(ग) तिलहन का भंडारण एवं संसाधन (processing) की तकनीक का विकास जिससे तेल तका उत्पादन बढ़ाया जा सके।

(घ) किसानों को उपज का उचित मूल्य दिलाने के साथ-साथ भंडारण, संसाधान एवं विपणन के लिए उद्योग को समर्थन।

तिलहन तकनीकी मिशन द्वारा उठाये गये विभिन्न कदमों के फलस्वरूप देश में तिलहन उत्पादन में प्रभावशाली बढ़त हुई है। 1996-97 के दौरान तिलहन का लगातार दूसरे वर्ष रिकार्ड उत्पादन हुआ और 1995-96 के 22.1 लाख टन के रिकार्ड उत्पादन से भी बढ़कर 249.6 लाख टन पर पहुँच गया। तिलहन क्षेत्र देश के लिए विदेशी मुद्रा कमाने वाले प्रमुख माध्यम के रूप में उभर रहा है। 1996-97 के दौरान 4700 करोड़ रुपए के तिलहन, कैस्टर आयल, मूँगफली, तिल और रामतिल जैसे तेलों का निर्यात किया गया।

श्वेत क्रांति (White Revolution)

यों तो कृषि से संबंधित अन्य अनेक क्षेत्रों, जैसे मत्स्य-पालन तथा मुर्गी पालन आदि में भी विकास कार्य हो रहा है, किन्तु डेरी-उद्योग (dairy farming) द्वारा दुग्ध उत्पादन बढ़ाने की दिशा में हो रहे प्रयास विशेष रूप से उल्लेखनीय हैं।

1970 में दुग्ध उत्पादन से संबंधित एक परियोजना का सूत्रपात हुआ जिसे ''आपरेशन फ्लड'' कहा गया। इसका उद्देश्य था देश में दूध की कमी को पूरा करना, उसकी उपलब्धता बढ़ाना तथा ग्रामीण क्षेत्रों में रोजगार के अवसर बढ़ाना तथा देश में सहकारिता पद्धति के एक बड़े डेरी उद्योग की स्थापना करना। इस परियोजना के दो चरण पूरे हो चुके हैं। प्रथम चरण, जिसे आपरेशन फ्लड-1 भी कहा जाता है, 1970 में ही आरम्भ हुआ था। इसका उद्देश्य केवल चार महानगरों, दिल्ली, मुम्बई, कोलकाता तथा चेन्नई और उन ग्रामीण क्षेत्रों में डेरी का विकास था जिनसे इन शहरों में दूध की आपूर्ति होती थी। इसके लिए लगभग 116 करोड़ रुपये का प्राविधान किया गया। यह कार्यक्रम काफी सफल और लाभकारी रहा।

— ऑपरेशन फ्लड के प्रथम चरण का कार्यक्रम जुलाई 1971 प्रारम्भ किया गया और 31 मार्च 1981 को समाप्त हो गया।

— ऑपरेशन फ्लड के द्वितीय चरण का कार्यक्रम अप्रैल 1981 में प्रारम्भ किया गया तथा मार्च 1985 में समाप्त हो गया।

— ऑपरेशन फ्लड का तृतीय चरण अप्रैल 1985 में प्रारम्भ किया गया मार्च 1986 में समाप्त हो गया।

आपरेशन फ्लड परियोजना के आरम्भ होने के बाद दुग्ध उत्पादन 1971-72 में 2.25 करोड़ टन से बढ़कर क्रमशः 1987 में 4.4 करोड़ टन हो गया। प्रति व्यक्ति दूध की खपत जो 1950 में 132 ग्राम प्रतिदिन से घटकर 1970 में 107 ग्राम प्रतिदिन रह गई थी, 1987 में बढ़कर 157 ग्राम प्रतिदिन हो गई। अब डेरी उद्योग में आने वाले इस क्रांतिकारी परिवर्तन को श्वेत क्रांति भी कहा जाता है।

डेयरी विकास का तकनीकी मिशन अगस्त 1988 में स्थापित किया गया।

डेरी विकास तकनीकी मिशन (Dairy Development Technology Mission)

आपरेशन फ्लड कार्यक्रम की अगली कड़ी के रूप में भारत सरकार ने डेरी विकास के लिए एक तकनीकी मिशन बनाने की घोषणा अगस्त 1988 में की। इस मिशन की स्थापना वास्तव में आनन्द पद्धति की डेरी सहकारिताओं की सफलता के कारण की गई जिसमें दुग्ध उत्पादकों की मुख्य भूमिका होती है। इस तकनीकी मिशन का उद्देश्य देश के 275 जिलों में डेरी सहकारिता का विस्तार करना था। साथ ही यह लक्ष्य भी रखा गया था कि सन् 2000 तक दूध का उत्पादन 1987 के 4.4 करोड़ टन से बढ़कर 7 करोड़ टन तथा दूध की प्रति व्यक्ति खपत 158 ग्राम से बढ़कर लगभग 200 ग्राम प्रतिदिन हो जाये। इस लक्ष्य की प्राप्ति के लिए 10 अरब रुपये का प्राविधान किया गया जिसमें आपरेशन फ्लड-3 के लिए आबंटित राशि सम्मिलित है।

इस मिशन की बागडोर डॉ. बी. कुरियन के हाथों में सौंपी गई जिन्होंने आनन्द सहकारिता संघ (या अमूल) के विकास से संबंधित रह कर देश में डेरी विकास में अग्रणी भूमिका निभाई है। मिशन द्वारा विभिन्न सरकारी कार्यक्रमों, कृषि विश्वविद्यालयों एवं अनुसंधान संस्थाओं के बीच डेरी विकास के लिए समन्वय स्थापित किया गया। दुग्ध उत्पादन बढ़ाने के लिए दुधारू पशुओं की संख्या बढ़ाने के साधन स्थान पर उनकी दुग्ध उत्पादकता बढ़ाने के लिए पशुओं की नस्ल में सुधार, उनके लिए उन्नत किस्म के चारे का प्रबंध तथा रोगों से बचाव पर विशेष ध्यान दिया जाना सम्मिलित है।

भारत में प्रमुख कृषि संस्थान

देश में कृषि अनुसंधान को बढ़ावा देने तथा उसे समन्वित करने के उद्देश्य से 1929 में इम्पीरियल काउन्सिल ऑफ एग्रीकल्चरल रिसर्च की स्थापना हुई थी। 1946 में इसका नाम इन्डियन कौंसिल ऑफ एग्रीकल्चरल रिसर्च (भारतीय कृषि अनुसंधान परिषद्) रखा गया। आज यह कृषि संबंधी योजना बनाने तथा कृषि, पशुपालन तथा मत्स्य उद्योग विज्ञान में होने वाले अनुसंधानों को समन्वित करने तथा उसे खेतों तक ले जाने वाली शीर्ष संस्था है। यह परिषद देश भर के कृषि विश्वविद्यालयों, कृषि अनुसंधान केन्द्रों, फसल सुधार परियोजनाओं तथा तदर्थ कार्यक्रमों का एकीकरण करती है।

1948 में देश में कृषि के केवल 17 महाविश्वविद्यालय थे। पशुपालन के महाविश्वविद्यालयों को कृषि से अलग रखा जाता था। आज देश में 32 कृषि विश्वविद्यालय हैं और 4 डीम्ड हैं। ये

राज्य स्तर पर कृषि में अनुसंधान, शिक्षा एवं प्रसार का कार्य करतें हैं। सभी प्रमुख राज्यों में एक से अधिक कृषि विश्वविद्यालय हैं, जैसे महाराष्ट्र में चार, उत्तर प्रदेश में 3. हिमांचल प्रदेश में 2, बिहार में 1 एवं झारखंड में 1 कृषि विश्वविद्यालय हैं। देश का सर्वप्रथम कृषि विश्वविद्यालय 1960 में उत्तर प्रदेश के पंतनगर में स्थापित हुआ था। (अब यह उत्तरांचल में चला गया है)। भारतीय कृषि अनुसंधान संस्थान (Indian Agricultural Research Institute) नई दिल्ली तथा भारतीय पशु चिकित्सा संस्थान (Indian Veterinary Fesearch Institute) इज्जतनगर को विश्वविद्यालय के समकक्ष (Deemed University) माना गया है।

कृषि अनुसंधान के लिए अब देश में 45 केन्द्रीय संस्थान है, इसमें से 30 केवल फसलों के सुधार के लिए लगभग 80 अखिल भारतीय समन्वित परियोजनाएँ (All India Coordinated Crop Improvement Projects) चल रही हैं। कृषि अनुसंधान के 500 से भी अधिक तदर्थ कार्यक्रम भी विभिन्न संस्थान द्वारा चलाए जा रहे हैं।

संदर्भ

1. ए मैन्युएल ऑन कन्जरवेशन ऑफ स्वाएल ऐण्ड वाटर, हैण्डबुक ऑफ प्रोफेशनल एग्रीकल्चरल वर्कर्स, यू. एस. डी. ए. आक्सफोर्ड एण्ड आई. बी. एच. पब्लिशिंग कम्पनी, नई दिल्ली (1964).
2. डोहन्डिआल, एस. पी. : प्राब्लम्स ऑफ इण्डियन एग्रीकल्चरल फ्रैण्डस : ऐन एग्रीकल्चरल पब्लिकेशन, मेरठ (1984).
3. बनसिल, पी. सी. : इक्नामिक प्राब्लम्स ऑफ इण्डियन एग्रीकल्चर, पाँचवा रिवाइज्ड ऐण्ड एनलार्ज्ड संस्करण। आक्सफोर्ड एण्ड आई. बी. एच. पब्लिशिंग कम्पनी, नई दिल्ली (1985).
4. यावालकर, के. एस., अग्रवाल, जे. पी. तथा बोक्डे, एस. : मैन्योर्स ऐण्ड फर्टिलाइर्ज्स, एग्रीकल्चरल पब्लिशिंग हाउस, नागपुर (1986).
5. सिंह, बी. डी. : प्लाण्ट ब्रीडिंग, कल्याणी पब्लिशर्स, नई दिल्ली (1983).
6. परिहार, एस. एस. तथा सन्धु, बी. एस. : प्रिन्सिपल्स ऐण्ड प्रैक्टिसेज़, ICAR (1987).
7. डोहन्डिआल, एस. पी. : फार्म मैनेजमेन्ट ; ऐन इकोनामिक एनालिसिस, फ्रैण्डस पब्लिकेशन मेरठ, 1984).
8. जोहल, एस. एस. तथा कपूर, टी. आर. : फण्डामेन्टल्स ऑफ फार्म बिजिनेस मैनेजमेन्ट, कल्याणी पब्लिशिर्स, लुधियाना (1987).
9. बैन्जिमिन, आर. ई., हरिहरन, एस. बी. तथा करुणाकरन ; इक्नामिक्स ऑफ एग्रीकल्चर, एस. चाँद ऐण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली (1989).
10. दी हिन्दू सर्वे ऑफ एग्रीकल्चर (1988, 1989, 1990, 1991, 1992).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 3, July 2002.

अविस्तारी प्रतिचित्रण के स्थिर बिंदु

देवेन्द्र दत्त शर्मा
गणित एवं सांख्यिकी विभाग, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार (उत्तरांचल)

[प्राप्त —2 अप्रैल 2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने स्थानतः अवमुख समष्टि पर परिभाषित अविस्तारी प्रतिचित्रणों के लिए एक स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किया गया।

Abstract

Fixed points of nonexpansive maps. *By* D. D. Sharma. Department of Mathematics and Statistics, Gurukula Kangri Vishwavidyalaya, Hardwar (Uttaranchal)-249404

In this paper a fixed point theorem has been proved for nonexpansive maps in locally convex spaces.

1. संकेतन एवं परिभाएं

मान लें E एक स्थानतः अवमुख सांस्थितिकतः सदिश समष्टि है। Q द्वारा ऐसे अर्धमानकितों के कुल को प्रदर्शित किया जाता है जो कि E की संस्थिति उत्पन्न करते हैं। इस प्रपत्र में प्रयुक्त कुछ संकेत इस प्रकार हैं :

$$\delta(A) = \text{उच्चक } \{ ||x - y|| : x, y \in A, A \subseteq E \}$$

$$\delta_p(A) = \text{उच्चक } \{ p(x - y) : x, y \in A, A \subseteq E \}$$

$$B_p[x, y] = \{ y : p(x - y) \leq r \}$$

$$\delta_p(x, A) = \text{निम्नक } \{ p(x - y) : y \in A \subseteq E \}$$

$D_p(A, B)$ = अधिकतम [उच्चक ($d_p(a, B) : a \in A$), उच्चक ($d_p(b, A) : b \in B$)] उल्लेख्य है कि अर्धमानकित p द्वारा प्रेरित फलन Dp एक दूरीक है, देखें, हाउसडोर्फ[16]

परिभाषा 1.1.[17] : किसी वानाख समष्टि B के परिबद्ध अवमुख उपसमुच्चय K में प्रसामान्य विन्यास होता है यदि K के प्रत्येक एक से अधिक बिंदुओं वाले अवमुख उपसमुच्चय S के लिए, S में एक ऐसे बिंदु x का अस्तित्व हो कि

$$\text{उच्चक } py \in S \,||x - y|| < \delta(S)$$

परिभाषा 1.2[24] : किसी स्थानतः अवमुख समष्टि E के अवमुख उपसमुच्चय K में प्रसामान्य विन्यास होता है, यदि K के एक से अधिक बिंदुओं वाले परिबद्ध अवमुख उपसमुच्चय W के लिए, W में एक ऐसे बिंदु x का अस्तित्व हो कि

$$\text{उच्चक } \max_{y \in w} p(x - y) < \delta_p(W)$$

प्रसामान्य विन्यास पर विस्तृत अध्ययन के लिए [2], [5], [11]-[13], [20], [24], [26], [28]-[30] का अवलोकन करें।

किर्क[17] द्वारा 1965 में निम्न प्रमेय स्थापित किया गया :

प्रमेय 1.1 : मान लें x एक स्वतुल्य बानाख समष्टि है तथा C प्रसामान्य विन्यास के साथ एक संवृत परिबद्ध अवमुख उपसमुच्चय है यदि $T : C \to C$ एक अविस्तारी प्रतिचित्रण हैं। तब T में एक स्थिर बिंदु का अस्तित्व होगा।

उलेख्य है कि प्रमेय 1.1 की सभी शर्तें स्थिर बिंदु की प्राप्ति के लिए आवश्यक हैं। देखें।[13] यह प्रमेय तब भी सत्य है यदि C को बानाख समष्टि B का प्रसामान्य विन्यास के साथ अवमुख दुर्बलतः संहत उपसमुच्चय लिया जाय। दूसरी ओर यह प्रश्न वर्षों तक अनुत्तरित रहा कि क्या किसी बानाख समष्टि B के प्रत्येक दुर्बलतः संहत अवमुख उपसमुच्चय C पर परिभाषित प्रत्येक अविस्तारी प्रतिचित्रण के स्थिर बिंदु का अस्तित्व (स्थिर बिंदु गुण) होता है ? हाल ही में प्रोफेसर डी. ई. एलफाख़[2] द्वारा इस प्रश्न का नकारात्मक उत्तर निम्न उदाहरण प्रस्तुत करते हुए दिया गया :

उदाहरण 1.1 : मान लें x लीबेग समष्टि L^1 [0, 1] है और $C = \{x \in L^1[0, 1] : 0 < x(t) < 2$ सर्वत्रप्रायः और $\int_0^1 x(t) = 1\}$ मान लें $T : C \to C$ इस प्रकार पारिभाषित है :

$$(Tx)\,t = \begin{cases} \min\{2, 2x(2t)\}, & \theta < t \le 1/2 \\ \max\{\theta, 2x(2t-1) - 2\}, & 1/2 < t \le 1 \end{cases}$$

तब C एक अवमुख और दुर्बलतः संहत उपसमुच्चय है तथा T एक ऐसा अविस्तारी प्रतिचित्रण है जो कि स्थिर बिंदु मुक्त है।

प्रमेय 1.1 की सहायता से निम्न परिणाम प्राप्त किया जा सकता है, जिसे ब्राउडर[8], गोहडे[4] एवं किर्क[17] ने स्वतंत्र रूप से प्राप्त किया था।

प्रमेय 1.2 : मान लें x एक समान अवमुख बानाख़ समष्टि है तथा C इसमें एक अरिक्त संवृत अवमुख उपसमुच्चय है। यदि $T: C \to C$ एक अविस्तारी प्रतिचित्रण है तब T का एक स्थिर बिंदु होगा।

1973 में गोबेल-क्रिकं-शीमी[11] ने व्यापकीकृत अविस्तारी प्रतिचित्रणों (ऐसे प्रतिचित्रणों जो 1.3.1 को सन्तुष्ट करें) के लिए निम्न प्रमेय स्थापित की :

प्रमेय 1.3 : मान लें एक समान अवमुख बानाख़ समष्टि X का K का अरिक्त, परिबद्ध, संवृत अवमुख उपसमुच्चय है, यदि $T: K \to K$ एक संतत प्रतिच्रित्रण ऐसा है कि K के प्रत्येक x, y के लिए संकुचन शर्त :

$$||Tx - Ty|| \leq a_1 ||x - y|| + a_2 ||x - Tx|| + a_3 ||y - Ty|| + a_4 ||x - Ty|| + a_5 ||y - Tx|| \quad (1.3.1)$$

संतुष्ट होती है जहाँ $a_i \geq \theta$ एवं $\sum_{i=1}^{n} a_i < 1$ है तब T का K में एक स्थिर बिंदु होगा।

परिभाषा 1.3 : स्थानतः अवमुख समष्टि E के किसी उपसमुच्चय C पर परिभाषित स्वप्रतिचित्रण T को अविस्तारी कहा जाता है यदि Q के प्रत्येक P एवं समुच्चय C के अनेक x, y के लिए $p(Tx - Ty) \leq p(x - y)$ हो।

1982 में नेम्पली सिंह, ह्वटफील्ड[24] द्वारा स्थानतः अवमुख समष्टि में प्रमेय 1.3 का विस्तार इस प्रकार किया गया :

प्रमेय 1.4 : मान लें E एक स्थानतः अवमुख समष्टि है तथा E में K एक दुर्बलतः संहत अवमुख उपसमुच्चय प्रसामान्य संरचना के साथ है। मान लें $T: K \to \mathrm{K}$ एक संतत प्रतिचित्रण ऐसा है कि Q के प्रत्येक P एवं X के प्रत्येक x, y के लिए

$$p(Tx - Ty) \leq a_1 p(x - y) + a_2 p(x - Tx) + a_3 p(y - Ty) + a_4 p(x - Ty) + a_5 p(y - Tx)$$

संतुष्ट हो जहाँ $a_i \geq \theta$, $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$ हैं, तब T के एक स्थिर बिंदु का अस्तित्व होगा।

परिभाषा 1.4.[15] : मान लें स्थानतः अवमुख समष्टि E में K एक संहत उपसमुच्चय है। बहुमानी प्रतिचित्रण $T: K \to 2^K$ को अविस्तारी कहा जायेगा यदि Q के प्रत्येक P एवं K के प्रत्येक x, y के लिए

$$D_p(Tx, Ty) \leq p(x - y)$$

संतुष्ट हो।

प्रमेय 1.5.[15] : मान लें E एक अर्धस्वतुल्य स्थानतः अवमुख समष्टि है तथा E का K संवृत परिबद्ध अवमुख उपसमुच्चय प्रसामान्य संरचना के साथ है। यदि $T: K \to 2^K$ एक बहुमानी प्रतिचित्रण ऐसा है कि

K के प्रत्येक x के लिए $T(x) \cap k \neq \phi$ **(1.5.1)**

K के किसी संवृत अवमुख उपसमुच्चय L के लिए $L(W) \cap L = \phi$.
जहाँ सभी $W \in L.$ **(1.5.2)**

L के सभी $x, y\,(x \neq y)$ के लिए

$$D_p(Tx \cap L, Ty \cap L) \leq p(x - y) \qquad (1.5.3)$$

तो T का एक स्थिर बिंदु होगा।

उपर्युक्त प्रमेय आसाद-क्रिर्क[4], क्रिर्क[17], मार्किन[21] एवं नाडलर[23] के परिणामों का विस्तारण करती है। अविस्तारी प्रतिचित्रणों के लिए विभिन्न विन्यासों में कई स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किये गये, उदाहरणार्थ देखें[1], [2], [3], [5], [6], [9, [10], [13], [14]-[15], [17]-[22], [24], [25], [27], [29], [30]।

हाल ही में आचारि-लहरी[1] तथा लहरी-तिवारी[18] ने स्वतुल्य बानाख समष्टि के संवृत अवमुख परिबद्ध व प्रसामान्य संरचना वाले उपसमुच्चय K पर पारिभाषित स्व-प्रतिचित्रण T के लिए निम्न प्रतिबंध के अधीन स्थिर बिंदु प्राप्त किये :

$(^k)\, ||Tx - Ty|| <$ अधिकतम $\{||x - y||, ||x - Tx||, ||y - Ty||\}$
जहाँ सभी $x, y \in k$.

प्रस्तुत प्रपत्र में हम शर्त $(^k)$ का अध्ययन स्थानतः अवमुख समष्टि में कर रहे हैं।

2. परिणाम

प्रमेय 2.1 : मान लें X एक अर्धस्वतुल्य स्थानतः अवमुख समष्टि है एवं K समष्टि X का एक अरिक्त, संवृत अवमुख परिबद्ध उपसमुच्चय प्रसामान्य संरचना के साथ है। मान लें $T: K \to K$ एक ऐसा प्रतिचित्रण है कि X के प्रत्येक x, y के लिए निम्न शर्तें संतुष्ट होती हैं :

$$p\,(Tx - Ty) \leq \text{अधिकतम}\,\{p\,(x - Tx),\ p\,(y - Ty),\ p\,(x - Tx)\} \qquad (2.1.1)$$

$$\max_{y \in F} p\,(y - Ty) \leq \delta_p\,(F) \qquad (2.1.2)$$

जहाँ प्रत्येक F, K का वह अरिक्त संवृत अवमुख उपसमुच्चय है जो T द्वारा स्व-प्रतिचित्रित है। तब T का K में एक स्थिर बिंदु होगा।

उपपत्ति : मान लें H, K के उन अरिक्त संवृत अवमुख उपसमुच्चयों का कुल है जो समुच्चय आविष्टि द्वारा क्रमित हैं एवं T द्वारा स्व-प्रतिचित्रित है। तब अर्धस्वतुल्यता से H की प्रत्येक श्रृंखला में परिमित सर्वनिष्ठ गुण होगा। जार्न प्रमेयिका से H में एक अल्पिष्ठ अवयव F (मान लें) होगा। अब यदि F में केवल एक ही अवयव है तब हमारी उपपत्ति पूर्ण हुई। विलोमतः मान लें F में एक से अधिक अवयव हैं।

माना
$$A = \max_{y \in F} p\,(Ty - y)$$

तब (2.1.2) से

$$A < \delta_p\,(F)\,.$$

F के प्रत्येक x के लिए मान लें

$$u_x\,(F) = \text{अधिकतम} \left\{ \max_{y \in F} p\,(x - y),\ A \right\}$$

$$u\,(F) = \text{निम्नक}\left\{ u_x\,(F) : x \in F \right\}$$

$$F_c = \left\{ x \in F : u_x(F) = u\,(F) \right\}$$

अब हम यह दिखायेंगे कि F_c एक अरिक्त संवृत एवं अवमुख समुच्चय है।
मान लें किसी धन संख्या n और F के प्रत्येक x के लिए

$$F\,(x,\ n) = \{ y \in F : p\,(x - y) \leq u\,(F) + 1/n \}$$

और

$$C_n = \bigcap_{x \in F} F\,(x,\ n)$$

सर्वप्रथम हम यह दिखायेंगे कि समुच्चय C_n अरिक्त है। मान लें ऐसा नहीं है, तब F में x_1 एवं x_2 का अस्तित्व ऐसा होगा कि

$$F\left(x_1, n\right) \cap F\left(x_2, n\right) = \phi$$

जिससे

$$p\left(x_1 - x_2\right) \geq u(F) + 1/n + u(F) + 1/n = 2\,u(F) + 2/n \qquad (2.1.3)$$

अब चूँकि F के प्रत्येक x के लिए

$$\max_{y \in F} p(x - y) \geq \delta_p(F) / 2$$

जिससे

$$u_x(F) \geq \delta_p(F) / 2$$

यह दर्शाता है कि

$$u(F) \geq \delta_p(F) / 2$$

अर्थात्

$$\delta_p(F) < 2\,u(F) + 2 / n$$

अतः (2.1.3) से

$$p\left(x_1 - x_2\right) > \delta_p(F)$$

जो एक विरोध है, चूँकि $x_1, x_2 \in F$

अतः C_n अरिक्त है। यह सिद्ध किया जा सकता है कि C_n संवृत एवं अवमुख है और $C_{n+1} \subset C_n$.

अब हम यह सिद्ध करेंगे कि $F_c = \bigcap_{n:1}^{\infty} C_n$

मान लें $y \in F_c$ तब $u_y(F) = u(F)$

अतः

$$\text{अधिकतम} \left\{ \max_{x \in F} p(y - x),\ A \right\} = u(F) \tag{2.1.4}$$

जिससे

$$\max_{x \in F} p(x - y) \le u(F) \ \text{तथा}\ A \le u(F)$$

अब हमें यह सिद्ध करना है कि समस्त n एवं F के प्रत्येक x के लिए $y \in F(x, n)$ मान लें ऐसा केवल कुछ n एवं F में कुछ ही x के लिए सत्य है, तब $p(x - y) > (u(F) + 1/n)$ जो कि (2.1.4) का विरोध है इसलिए $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} c_n$ जिससे $F_c \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} c_n$ मान लें $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} c_n$ तब F के प्रत्येक x एवं समस्त n के लिए $y \in P(x, 1)$, अतः

$$\max_{x \in F} p(x - y) \le u(F)$$

इससे $u_x(F) \le u(F)$ परन्तु $u(F) < u_x(F)$ ।

इसलिए $u_x(F) = u(F)$ अतः $y \in F_c$ या $\bigcap_{n=1}^{\infty} c_n \subset F_c$

इस प्रकार यह सिद्ध हुआ है $F_c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} c_n$

अतः F_c संवृत और अवमुख है तथा अर्धसर्वतुल्यता से अरिक्त है।

अब यह दिखाना शेष है कि $\delta_p(F_c) < \delta_p(F)$ । क्योंकि K प्रसामान्य संरचना के साथ है और $A \le \delta_p(F)$ इसलिए F में एक x का अस्तित्व ऐसा होगा कि $u_x(F) < \delta_p(F)$ । मान लें $x_1, x_2 \in F_c$ तब

$$p\left(x_1 - x_2\right) \le u_{x_1}(F) = u(F)$$

इसलिए

$$\delta_p\left(F_C\right) = \text{उच्चक}\left\{p\left(x_1 - x_2\right) : x_1, x_2 \in F_c\right\} \tag{2.1.5}$$

$$\le u(F) \le u_x(F) < \delta_p(F)$$

अब $x \in F_c$ और $y \in F$ के लिए $p(Tx - Ty)$

$$\leq \text{अधिकतम}\{p(x-y),\ p(Tx-x),\ p(Ty-y)\}$$

$$\leq \text{अधिकतम}\left\{p(x-y),\ \max_{y \in F} p(Ty-y)\right\}$$

$$\leq \text{अधिकतम}\left\{\max_{y \in F} p(x-y),\ A\right\}$$

$$= u_x(F) = u(F)$$

अतः $$T(F) \subset B_p[Tx,\ u(F)]$$

स्पष्ट है कि

$$T\Big(F \cap B_p[Tx,\ u(F)]\Big) \subset F \cap B_p[Tx,\ u(F)]\ (\because T(F) \subset F)$$

चूँकि F अल्पिष्ठ अवयव है इसलिए

$$F \subset B_p[Tx,\ u(F)]$$

अतः

$$\max_{y \in F} p(Tx-y) \leq u(F) \tag{2.1.6}$$

अब

$$u_{Tx}(F) = \text{अधिकतम}\left\{\max_{y \in F} p(Tx-y),\ A\right\}$$

$$\leq \text{अधिकतम}\{u(F),\ A\}\ (2.1.6) \text{से}$$

$$= u_i(F),\ \text{क्योंकि}\ A \leq u(F)$$

अतः $u_{Tx}(F) \leq u(F)$ परन्तु सदैव $u(F) \leq u_{Tx}$ होता है इसलिए $u(F) = u_{Tx}(F)$ जो यह दर्शाता है कि $Tx \in F_c$

इसलिए F का F_c एक ऐसा अरिक्त संवृत अवयव उपरामुच्चय है जो T द्वारा स्व-प्रतिचित्रित है। चूँकि (2.1.5) से $\delta_p(F_c) < \delta_p(F)$ इसलिए $F_c \subset F$ । यह इस तथ्य का विरोध करता है कि F अल्पिष्ठ अवयव है। अतः F में एक से अधिक अवयव नहीं हो सकता।

निर्देश

1. आचारि, जे. तथा लहरी, बी. के. : Riv. Mat. Univ. Parma, 1980, 43, 161-165.
2. एलफाख़, डी. ई. : Proc. Amer. Math. Soc., 1981, 82, 423-434.
3. डुने, ई. एनडरसन, मारले, डी. ग्वे तथा सिंह, के. एल. : Jnanabha, 1988, 18, 31-43.
4. असाद, एन, ए. तथा क्रिक, डब्लू, डी. ए. : Pacific J. Math. 1972, 45, 533-62.
5. बे, जे. एस. : Studies on generalized non-expansive maps, D. Phil Thesis, Seoul National Univ. Korea, 1983.
6. बायो, जे. बी., ब्रुक, आर. ई. तथा रीच, एस. : Houston J. Math., 1978, 4, 1-9.
7. बीलूस, एल. बी., क्रिक, डब्सू. ए., तथा स्टेनर, ई. एफ. : Pacific J. Math., 1968, 26, 443.
8. ब्राउडर, एफ. ई. : Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1965, 54, 1041-1044.
9. कार्बोन, ए. तथा मारिनो, जी. : Riv. Mat. Univ., Parma, 1987, 13, 385-393.
10. दीमीनी, सी. तथा व्हाइट जूनि, ए. Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 1978, 6, 245-253.
11. गोबेल, के., क्रिक, डब्लू. ऐ. तथा सीमी टी. एन. : Boll. Un. Mat. Ital., 1973, 7, 67-75.
12. गोबेल, के. तथा कुजमोव, टी. : Bull. Cal. Math. Soc. 1978, 78, 335-357.
13. गोबेल, के. तथा रीच, एस. : Uniform convexity, hyperbolic geometry and nonexpansive mappings, Marcel Dekker, New York, 1984.
14. ग्होडे, डी. : Math. Nachr., 1965, 30, 251-258.
15. मारले, डी. ग्वे, सिंह, के. एल. तथा व्हीटफील्ड, जे. एच. एम. : Jnanabha, 1978, 18, 45-54.
16. हाउसफोर्ड, एफ. : Set theory, Third Ed. Chelsea, New York, 1957.
17. क्रिक, डब्लू. ए. : Amer. Math. Monthly, 1965, 72, 1004-1006.
18. लहरी, बी. के. तथा तिवारी, के. : J. Nat. Acad. Math., 1985, 3, 43-46.
19. लाल, एस. एन. तथा सिंह ए. के. : Indian J. Math., 1978, 20, 71-76.
20. लिम, एल. सी. : Proc. Amer. Math. Soc., 1974, 43, 313-319.
21. मार्किन, जे. टी. : Bull. Amer. Math. Soc., 1963, 74, 639-640.

22. मासो, एम. तथा रोक्ष, डी. : Boll. Un. Mat. Ital., 1978. A 15, 624-634.

23. नाडलर जूनि., एस. बी. : Pacafic J. Math., 1969, 30, 475-488.

24. नैम्पली, एस. ए., सिंह के. एल. तथा व्हीटफील्ड, जे. एच. एम. : J. Math., Anal. Appl., 1983, 96, 437-446.

25. वही. Math. Nach., 1986, 127, 177-180.

26. सिंह, एस. एल. : Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 1977, 5, 295-312.

27. सिंह, एस. एल. तथा शर्मा, डी. डी. 2- दूरीक एवं 2-मानकित समष्ठियों में संपात एवं स्थिर बिंदु समीकरणों के साधन, रिसर्च मोनोग्राफ, वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग, मानव संसाधन एवं विकास मंत्राल (शिक्षा विभाग), भारत सरकार 1999.

28. थीप, एन. तथा वेट, एच. डी. : Comment, Math. Carolinae, 1979, 20, 29-36.

29. वॉग, सी. एस. : J. Functional Analysis, 1974, 16, 353-358.

30. जाई, जे. पी. : Kexue Tongbao, 1989, 34, 163-165.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 3, July 2002.

I-फलन तथा छड़ में उष्मा चालन में सीमांत मान समस्या का हल

ए. के. रोंघे
गणित विभाग, एस. एस. एल. जैन महाविद्यालय, विदिशा (म. प्र.)

[प्राप्त — फरवरी 4, 2000]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में दो समाकलन I-फलन युक्त ज्ञात किये गये हैं, जिसका प्रयोग रोबिन स्थिति के अन्तर्गत छड़ में प्रवाहित होने वाली उष्मा में किया गया है। साथ ही I-फलन युक्त विस्तार सूत्र की स्थापना की गई है। विशिष्ट दशाओं के रूप में उष्मीय समस्या का हल फाक्स H-फलन एवं माइजर G-फलन में भी प्रकट किया जा सकता है।

Abstract

***I*-function and heat conduction in rod under typical boundary condition**. *By* A. K. Ronghe. Department of Mathematics, S.S.L. Jain P. G. College, Vidisha (M.P.).

In this paper, we evaluate two integrals involving, *I*-function and employ them to obtain a solution of the problem for heat flow in rod under Robin condition, expansion formula involving above function. We can derive a solution of the problem involving Fox's *H*-Function, Meijer's *G*-function as special cases of our solution.

सक्सेना का सार्वीकृत H-फलन[6] जो I-फलन द्वारा माना जाता है, जिसके गुणधर्मों का अध्ययन वैश्य तथा जैन[7] एवं वर्मा[9] के शोधपत्रों में किया गया है, उस फलन को निम्नवत् प्रस्तुत किया जा रहा है।

$$I[z] = I^{m,n}_{p_i, q_i : n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} \oplus_1, \oplus_2 \\ \oplus_3, \oplus_4 \end{matrix} \right], \oplus_1, \ldots, \oplus_4$$

प्राचलों का समुच्चय

$$I^{m,n}_{p_i,q_i:r}\left[z\left|\begin{matrix}\left[\left(a_j,\alpha_j\right)_{1,n},\left[\left(a_{ji},\alpha_{ji}\right)\right]_{n+1},p_i\right.\\\left[\left(b_j,\beta_j\right)_{1,m},\left[\left(b_{ji},\beta_{ji}\right)\right]_{m+1},q_i\right.\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi w'}\int_{-w\infty}^{w\infty}\theta(s)\,z^s\,ds \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\theta(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j-\beta_j s\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j+\alpha_j s\right)}{\sum_{i=1}^{r}\left[\prod_{j=1}^{q_i}\Gamma\left(b_{ji}-\beta_{ji}s\right)\prod_{j=n+1}^{p_i}\Gamma\left(a_{ji}-\alpha_{ji}s\right)\right.}$$

$$w'=\sqrt{-1} \tag{1.2}$$

शेष अन्य सभी शर्तें सक्सेना एवं वैश्य[6] तथा जैन और वर्मा [7] के शोध प्रपत्र में दी हुई हैं।

2. मुख्य समाकलनों का मूल्यांकन करते समय निम्नलिखित परिणामों की आवश्यकता पड़ेगी [2, p. 372 (1), (8)]।

$$\int_0^L\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1}\left(\sin\frac{\lambda_m x}{L}\right)dx$$

$$=\frac{L\sin\,(\lambda_m x)/2\,\Gamma w}{2^{w-1}\Gamma\,(w+\lambda_m+1)/2\,\Gamma\,(L\,w-\lambda_m+1)/2)} \tag{2.1}$$

एवं

$$\int_0^L\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1}\left(\cos\frac{\lambda_m x}{L}\right)dx$$

$$=\frac{L\cos\,(\lambda_m x)/2\,\Gamma w}{2^{w-1}\Gamma\left(\frac{w+\lambda_m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w-\lambda_m+1}{2}\right)} \tag{2.2}$$

(2.1) और (2.2) में Re $(w) > 0$ और [5.p. 196 (9) तथा (10)]

$$\int_0^L \left[\cos \lambda_m x + \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x \right] \left[\cos \lambda_m x + \frac{h}{\lambda_m} \sin \lambda_m x \right] dx$$

$$= \begin{cases} \left(\left(\lambda_n^2 + h^2 \right) L + 2h \right), \ [2\lambda_n]^{-2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \tag{2.3}$$

जहाँ λν एक समीकरण का धनात्मक मूल है जो

$$\tan \lambda L = 2h\lambda / \left(\lambda^2 - h^2 \right) \tag{2.4}$$

3. मुख्य समाकलन :

प्रपत्र में *I*-फलन युक्त समाकलनों का मूल्यांकन किया गया जिनका प्रयोग विस्तार सूत्र एवं छड़ में उष्मा-चालन के लिये किया जायेगा।

$$\int_0^L \left(\sin \frac{\pi x}{L} \right)^{w-1} \left(\sin \frac{\lambda_m x}{L} \right) I \left[z (\sin \pi x)/L)^{2u} \right] dx$$

$$= I^{m,n}_{p_i+1, q_i+2:\pi} \left[z (4)^u \left| \begin{matrix} \oplus_1, I_1, \oplus_2 \\ \oplus_3, I_3, \oplus_4 \end{matrix} \right. \right], \ L \sin \left(\frac{\lambda_m}{2} \right) 2^{1-w} \tag{3.1}$$

$$\int_0^L \left(\sin \frac{\pi x}{L} \right)^{w-1} \left(\cos \frac{\lambda_m x}{L} \right) I \left[z (\sin \pi x)/L)^{2u} \right] dx$$

$$= I^{m,n+1}_{p_i+1, q_i+2:r} \left[z (4)^u \left| \begin{matrix} \oplus_1, I_1, \oplus_2 \\ \oplus_3, I_2, \oplus_4 \end{matrix} \right. \right], \ L \cos \left(\frac{\lambda_m}{2} \right) 2^{1-w} \tag{3.2}$$

(3.1) एवं (3.2) निम्नलिखित प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध हैं एवं I_1 और I_2 प्राचलों का समुच्चय है।

$$\text{Re}\left[w + 2u \min_{1 \le j \le m} \left(b_j / \beta_j \right) \right] > 0 \tag{3.3}$$

$$|\arg z| < \frac{1}{2}\pi B, \ (B > 0, \ A \le 0)$$

जहाँ

$$A = \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{ji} - \sum_{j=1}^{q_i} \beta_{ji} \tag{3.4}$$

$$B = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j - \sum_{j=n+1}^{p_i} \alpha_{ji} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \sum_{j=m+1}^{q_i} \beta_{ji} \tag{3.5}$$

$$\forall i \varepsilon 1, 2, 3 \ldots r$$

एवं प्राचल

$$I_1 = (1 - w; \ 2u), \ I_2 \left(\left(1 - w \pm \lambda_m \right) / 2, \ u \right) \tag{3.6}$$

उपपत्ति : समाकलन (3.1) एवं (3.2) को सिद्ध करने में सार्वीकृत H-फलन को (1.1) की सहायता से एवं मेलिन-बार्निज कंटूर समाकलन से तथा समाकलन के क्रम को बदलते हुए तथा यह मानकर प्रक्रिया में सन्निहित पूर्णतया अभिसारी है, एवं (2.1) तथा (2.2) का क्रमशः प्रयोग करने पर समाकलन (3.1) एवं (3.2) के दायें पक्ष की प्राप्ति होती है।

4. छड़ में उष्मा-चालन एवं सीमांत मान के अन्तर्गत समस्या का हल

इस अनुभाग में यह मान कर चलते हैं कि रोबिन स्थिति के अन्तर्गत दी हुई छड़ एकसमान है (शून्य ताप पर उष्मा का चालन छड़ के अन्दरूनी भाग में होता है) यदि उष्मा-चालन गुणांक स्थिरांक, इसमें उष्मीय ऊर्जा का कोई स्रोत नहीं हो केवल $u\ (x,\ t)$ फलन जो कि छड़ में $0 \le x \le L$ के अन्तर्गत उष्मीय समीकरण व्यक्त किया

$$\partial u / \partial t = u \left(\partial^2 u / \partial x^2 \right) \tag{4.1}$$

और मूल स्थिति में $t = 0$

$$u(x, 0) = f(x) \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}[(0, t)] - h\,u(0, t) = 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L\,t) + h\,u(L\,T) = 0; \quad h > 0 \tag{4.4}$$

(4.1) समीकरण निम्नलिखित व्यंजक को सन्तुष्ट करता है—

$$e^{-k\lambda_n^2 t}\left[A\cos\lambda_n x + B\sin\lambda_n x\right] \tag{4.5}$$

समीकरण (4.5), जो कि (4.3) एवं (4.4) को भी संतुष्ट करता है। जबकि

$$\lambda_x B - hA = 0 \tag{4.6}$$

और

$$\lambda_n\left[B\cos\lambda_n L - A\sin\lambda_n L\right] + h\left[A\cos\lambda_n L + B\sin\lambda_n L\right] = 0 \tag{4.7}$$

(4.7) एवं (4.6) के द्वारा हम

$$A/B = \lambda_n / n \text{ और } \tan\lambda_n L = 2\lambda_n h / \lambda_n^2 - h^2 \tag{4.8}$$

प्राप्त करते हैं।

तब समस्या का हल छड़ में निम्नवत् सम्भव हो सकेगा।

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[\cos\lambda_n x + h / \lambda_n \,.\, \sin\lambda_n x\right] e^{k\lambda_n^2 t} \tag{4.9}$$

5. विस्तार सूत्र

समाकल (3.1) एवं (3.2) के बल पर अभिलाक्षणिक गुण (2.3) के निम्न परिणाम प्राप्त होता है।

$$u(x, t) = 2L(2)^{1-w} \sum_{n=1}^{w} \frac{\lambda_m^2 e^{-k\lambda_n^2 t}}{[(\lambda_n^2 + h^2) L + 2h]} \cdot \left\{ \cos\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right) \right.$$

$$\cdot \times I^{m,n}_{p_i+1, q_i+2:r}\left[z(2)^{2u} \middle| \begin{matrix} \oplus_1, I_1, \oplus_2 \\ \oplus_3, I_2, \oplus_4 \end{matrix} \right] + \frac{h}{\lambda_n} \sin\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right)$$

$$\left. \times I^{m,n}_{p_i+1, q_i+2:r}\left[z(2)^{2u} \middle| \begin{matrix} \oplus_1, I_1, \oplus_2 \\ \oplus_3, I_2, \oplus_4 \end{matrix} \right] \right\} \tag{5.1}$$

बशर्ते

$$\text{Re}\left[w + 2u \min_{1 \le j \le m} \left(b_j / \beta_j \right) \right] > 0$$

I_1, I_2 प्राचल का समुच्चय (3.6) में दिया हुआ है।

उपपत्ति : माना कि

$$u(x, 0) = \left(\sin\frac{\pi x}{L} \right)^{w-1} I^{m,n}_{p_i, q_i:n}\left[z\left[\left(\sin\lambda_n x \right) / L \right]^{2u} \middle| \begin{matrix} \oplus_1, \oplus_2 \\ \oplus_3, \oplus_4 \end{matrix} \right] \tag{5.2}$$

और (4.9) में $t = 0$ रखने पर

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\cos\lambda_n + \frac{h}{\lambda_n} \sin\lambda_n x \right] \tag{5.3}$$

समीकरण (5.2) $u(x, 0)$ के अन्तर्गत वैध है जो खुले अन्तराल (0 से L) में परिबद्ध है।

(5.3) में दोनों ओर $[\cos mx + h/m \sin mx]$ और x के सापेक्ष 0 से L के अन्दर समाकलन करने पर तथा (2.3), (3.1) एवं (3.2) के प्रयोग से हम C_m का मान प्राप्त करते हैं जिसे (5.3) में रखने पर विस्तार सूत्र (5.1) प्राप्त होता है।

6. विशिष्ट दशाएं

(i) यदि परिणाम (3.1), (3.2) और (5.1) में r =1 रखें तो फाक्स[4] H-फलन में चौरसिया [3, p. 81-81] के परिणाम प्राप्त होते हैं।

(ii) यदि परिणाम (3.1), (3.2) और (5.1) में $\alpha_i = \alpha_{ji} = \beta_j = \beta_{ji} = c = 1$ एवं $(i = l \ldots p_i, j = 1, \ldots q_i)$ $\pi = 1$ तो वाजपेयी-मिश्रा[1. p. 123-125] के परिणाम प्राप्त होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक मार्गदर्शन हेतु प्राचार्य डॉ. आर. के. जैन, जैन कालेज विदिशा का आभारी है।

निर्देश

1. बाजपेयी, एम. डी. तथा मिश्रा, साधना : विज्ञान परिषद अनु. पत्रि. 1990, 33, 2.
2. कार्सला, एच. एस. तथा जैगेर, जे. सी. : Conduction of heat in to solids. IInd Edition, Oxford Univ. Press, London, 1959.
3. चौरसिया, वी. बी. एल. : ज्ञानाभ 1991, 21, 1961.
4. फाक्स, सी. : Trans. Amer. Math. Soc. 1961, 98, 395-429.
5. ग्रेडश्टियन, आई. एस. तथा रैजिक आई. एम. : Tables of Integral Series. एके. इनक, न्यूयार्क 1980.
6. सक्सेना, वी. पी. : Proc. Nat. Acad. Sci., India, 1982, 52, (A), 33-75.
7. वैश्य, जी. डी. तथा जैन, रेनू वर्मा : Proc. Nat, Acad. Sci. Indi. 1989, 59 (A) II.
8. वर्मा, आर. सी. : Ph. D. Thesis, University Jabalpur, 1966.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 3, July 2002.

लीजेण्ड्र श्रेणी की (f, dn) संकलनीयता के सम्बध में

वी. एन. त्रिपाठी तथा एस. के. मिश्र
गणित विभाग, एस. बी. पी. जी. कालेज, बड़ागाँव (वाराणसी)

[प्राप्त — मार्च 10, 2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में सामान्य प्रतिबन्ध के अन्तर्गत लीजेन्ड्र श्रेणी की (f, dn) संकलनीयता पर एक प्रमेय की स्थापना की गई है जो चन्द्रा[1] के परिणाम के अनुरूप है।

Abstract

On (f, dn) summability of Legendre series. *By* V. N. Tripathi and S. K. Mishra, Department of Mathematics, S. B. P. G. College Baragaon (Varanasi) U.P.

Chandra[1] gave a criterion for the Euler Summanbility (E, q) of order $q > 0$ of the Fourier Series of a 2π-Periodic and Lebsegue integrable function $F(t)$ in the interval $(0, 2\pi)$ under certain conditions.

Here in the present paper we have established a theorem on (f, dn) summability of Legendre Series under general condition which is analogous to the result of Chandra[1]. It is worth noting that (f, dn) summability reduces to the (E, q) summability for the case where $f(z) = z$ and $dn = q$ where q is any real constant.

1. माना कि $f(z)$ अस्थिर पूर्ण फलन है और माना कि $\{dn\}$ ऐसी संमिश्र संख्याओं का अनुक्रम है कि

$$d\,i \neq f(0),\ d\,i \neq -f(1),\ i \geq 1 \tag{1.1}$$

स्मिथ ने[4] (f, dn) संकलनीयता विधि को निम्नांकित प्रकार से परिभाषित किया है।

कोई अपरिमित श्रेणी $\sum An$ अपने आंशिक योगफलों के योगफल t तक संकलनीय $\{f, dn\}$ कही जाती है $\{tn\}$ के समेत अनुक्रम के रूप में यदि और केवल यदि

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, t_k = t \tag{1.2}$$

जहाँ $a_{n,k}$ अवयव हैं मैट्रिक्स

$$A = \left[a_{n,k} \right], \quad n, k = 0, 1, 2, \ldots$$

के जिसे निम्नांकित समीकरणों के सेट द्वारा परिभाषित किया जाता है—

$$a_{0,0} = 1$$

$$a_{0,k} = 0 \; (k \neq 0)$$

तथा

$$\sum_{\Lambda=1}^{n} \frac{f(z) + di}{f(1) + di} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, z^k ; \; (n \geq 1)$$

क्योंकि $f(z) = z$ एवं $dn = q$, जहाँ q वास्तविक अचर है, (f, dn) संकलनीयता विधि (E, q) संकलनीयता विधि में समाहित हो जाती है जिसे कोटि $q > 0$ की यूलर संकलनीयता से नाम से जाना जाता है।[2]

फलन f के बारे में जो भी कल्पनाएं की गई हैं उनके अतिरिक्त हम इसके आगे कल्पना करते हैं कि

$$f(1) = f'(1) = 1$$

जहाँ $$f''(1) \neq 0$$

हम लिखेंगे

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 + dj)}$$

$$L_n = 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 + dj)^2}$$

$$U_n = 2 H_n$$

$$S_n = 4\,C\,H_n + L_n$$

जहाँ C अचर है तथा

$$C = \frac{f''(1)}{2} > 0 \quad [\text{शूप}^{[3]}]$$

स्मिथ[4] ने (f, dn) संकलनीयता विधि के लिये नियमितता प्रतिबंध की स्थापना की। (f, dn) संकलनीयता विधि के लिए नियमितता प्रतिबन्धों का अर्थ होगा कि $U_n \to \infty$, $S_n \to \infty$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$ तथा

$$\frac{U_n^2}{S_n} \to \infty$$

अन्तराल $(-1, 1)$ में लेबेस्ग समाकलनीय फलन $F(t)$ से सम्बद्ध लीजेन्ड्र श्रेणी को

$$F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, P_n(t) \tag{1.3}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} F(t)\, P_n(t)\, dt \tag{1.4}$$

तथा nवें लीजेन्ड्र बहुपद $P_n(t)$ को जनक फलन

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zt + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, P_n(t) \tag{1.5}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है। हम लिखेंगे

$$\psi(t) = \psi_\theta(t) = F\{\cos(\theta - t)\} - F(\cos\theta)$$

$$K_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \frac{\sin(k + t) \cdot t}{\sin t/2}$$

चन्द्रा[2] के 2π-आवर्ती की फूरियर श्रेणी $q > 0$ की (E, q) संकलनीयता तथा कतिपय दशा के अन्तर्गत अन्तराल $(0, 2\pi)$ में लेबेस्ग समाकलनीय फलन $F(t)$ की विवेचना निम्नांकित को सिद्ध करके की है।

प्रमेय A : यदि

$$\Phi(t) = \int_o^t |\phi(u)|\, du = o\left[\frac{t}{\log \frac{1}{t}}\right] \tag{2.1}$$

ज्यों ज्यों $t \to +0$ जहाँ

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\{F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)\} \tag{2.2}$$

तब फलन $F(t)$ की फूरियर श्रेणी अन्तराल $((-\pi, \pi)$ में किसी बिन्दु x पर योगफल $F(x)$ तक संकलनीय $(E, q), q > 0$ हैं।

इस प्रपत्र में हमने सामान्य संकलनीयता विधि (f, dn) पर विचार किया है जिसकी (E, q) विशिष्ट दशा है और इसका समप्रयोग लीजेन्ड्र श्रेणी की (f, dn) संकलनीयता का अध्ययन करने के लिए किया है जिसमें निम्नांकित की स्थापना की गई है—

प्रमेय : यदि

$$\psi(t) = \int_o^t |\psi(u)|\, du = o\left[\frac{t}{\alpha\left(\frac{1}{t}\right)}\right] \tag{2.3}$$

ज्यों ज्यों $t \to 0$ जहाँ $\alpha(t)\, t$ का धन वर्धमान फलन है। तब श्रेणी (1.3) अन्तराल [-1, 1] में आन्तरिक बिन्दु λ पर योगफल $F(x)$ तक समाकलनीय (f, dn) है।

3. प्रमेयिका : हमें अपने प्रमेय को सिद्ध करने के लिए निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1 [शूप[3]]

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{f(e^{2it}) + dj}{1 + dj}$$

$$= e^{(2iH_n t - 4CH_n t^2 - L_n t^2)} + O\left(H_n t^3\right)$$

$$= e^{(iU_n t - S_n t^2)} + O\left(U_n t^3\right)$$

प्रमेयिका 2

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{f(e^{it}) + dj}{1 + dj} \leq e^{-\frac{-ct^2 U_n}{8}}$$

शूप[3] से स्पष्ट है जहाँ कि

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{Rj}{1 + dj} \leq e^{-ct^2 H_n}$$

के साथ ही

$$Rj = f\left(e^{2it}\right) + dj$$

अतः

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{f(e^{it}) + dj}{1 + dj} \leq e^{-\frac{-ct^2 U_n}{8}}$$

4. प्रमेय की उपपत्ति

[-1, 1] में बिन्दु $t = x$ पर लीजेन्ड्र श्रेणी के K वें आंशिक योगफल $T_k(x)$ को निम्न के द्वारा दिया जाता है।

$$T_k(x) - F(x)$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\sin}} \int_0^n \frac{F\{\cos(\theta - t)\} - F(\cos\theta)}{s\,m\ t/2} \sin(k + t)\, t \sqrt{\sin(\theta - t)}\, dt + 0(1)$$

$$= O\left[\int_0^n \frac{\psi(t) \,.\, \sin(k + 1)\, t}{\sin\frac{t}{2}}\, dt\right] + o(1) \qquad (4.1)$$

जहाँ η से $(-1,\ 1 - \lambda)$, $\lambda >$ '0 में μ के लिए [arc cos u − arc cos $(u + \lambda)$] के न्यूनतम को प्रदर्शित किया जाता है।

अतः T_k के (f, dn) रूपान्तर σn को (1.2) का अनुसरण करते हुए निम्नवत् दिया जावेगा–

$$\sigma n(x) - F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} \left\{ T_k(x) - F(x) \right\}$$

$$= O\left[\int_{o}^{\eta} \psi(t) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} \frac{\sin(k+1)t}{\sin t/2} \right\} dt \right] + 0(1)$$

$$= O\left[\int_{o}^{\eta} \psi(t) K_n(t)\, dt \right] + 0(1)$$

$$= O\left[\left\{ \int_{0}^{\frac{2\pi}{U_n}} + \int_{\frac{2\pi}{U_n}}^{U_n^{-\beta}} + \int_{U_n^{-\beta}}^{n} \right\} \psi(t) . K_n(t) . dt \right] + 0(1)$$

$$= O\left(I_1\right) + O\left(I_2\right) + O\left(I_3\right) + O(1) \qquad (4.2)$$

अब यह दिखाने के लिए कि

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(x) = F(x)$$

हमें सिद्ध करना होगा कि

$$I_1 = 0(1),\ I_2 = 0(I),\ I_3 = 0(I) \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \qquad (4.3)$$

सर्वप्रथम हम I_1 पर विचार करेंगे। अब

$$I_1 = \int_{0}^{\frac{2\pi}{U_n}} \psi(t) K_n(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{U_n}} \psi(t) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} \frac{\sin(k+1)t}{\sin t/2} \right\} dt$$

$$= O\left[\int_0^{\frac{2\pi}{U_n}} \frac{\psi(t)}{t} \operatorname{Im}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k}\, e^{i(k+1)t} \right\} dt \right]$$

$$= O\left[\int_0^{\frac{2\pi}{U_n}} \frac{\psi(t)}{t} \operatorname{Im}\left\{ e^{it} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k}\, e^{ikt} \right\} dt \right]$$

$$= O\left[\int_0^{\frac{2\pi}{U_n}} \frac{\psi(t)}{t} \operatorname{Im}\left\{ e^{it} \prod_{j=1}^{n} \frac{f(e^{it}) + dj}{1 + dj} \right\} dt \right]$$

$$= O\left[\int_0^{\frac{2\pi}{U_n}} \frac{\psi(t)}{t} \left\{ e^{-sn\frac{t^2}{4}} \left| \sin\left(U_n + 1\right) t/2 \right| \right\} dt \right]$$

$$+ O\left[\int_0^{\frac{2\pi}{U_n}} \frac{\psi(t)}{t} \left(U_n\, t^3\right) dt \right]$$ प्रमेयिका 1 का प्रयोग करने पर

$$= I_{1.1} + I_{1.2} \quad \text{माना} \tag{4.4}$$

हमें ज्ञात है कि

$$\left| i_{1.1} \right| = O\left[\int_0^{\frac{2\pi}{U_n}} \frac{|\psi(t)|}{t} \; U_n \frac{t}{2} \; dt \right]$$

$$= O\left(U_n \right) \int_0^{\frac{2\pi}{U_n}} |\psi(t)| \; dt$$

$$= O\left(U_n \right) o\left[\frac{\frac{1}{U_n}}{\alpha\left(U_n \right)} \right]$$ (2.3) का प्रयोग करने पर

$$= o\left[\frac{1}{\alpha\left(U_n \right)} \right]$$

$$= o(1), \text{ज्यों ज्यों } n \to \infty \qquad (4.5)$$

क्योंकि α धन एकदिष्ट वर्धमान फलन है t का।

अब $I_{1.2}$ पर विचार करने पर हम पाते हैं कि

$$\left| i_{1.2} \right| = O\left[\int_o^{\frac{2\pi}{U_n}} \frac{|\psi(t)|}{t} \left(U_n \; t^3 \right) \; dt \right]$$

$$= O\left(U_n \right) \int_o^{\frac{2\pi}{U_n}} |\psi(t)| \, t^n \; dt$$

$$= O\left(\frac{1}{U_n}\right) \int_{o}^{\frac{2\pi}{U_n}} |\psi(t)|\, dt$$

$$= O\left(\frac{1}{U_n}\right) o\left[\frac{\frac{1}{U_n}}{\alpha\left(U_n\right)}\right]$$

$$= o\left[\frac{1}{Un^2\, \alpha(Un)}\right]$$

$$= o(1), \text{ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{4.6}$$

चूँकि $U_n \to \infty$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$ तथा $\alpha(t)$ पर (4.4), (4.5) तथा (4.6) से विचार करने पर हमें मिलता है–

$$I_1 = o(I) \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{4.7}$$

अब हम I_2 पर विचार करते हैं तो हमें I_1 **की ही तरह मिलता है।**

$$I_2 = \int_{\frac{2\pi}{U_n}}^{U_n^{-\beta}} \psi(t)\, k_n^t\, dt$$

$$= O\left[\int_{\frac{2\pi}{U_n}}^{U_n^{-\beta}} \frac{\psi(t)}{t} \left\{ e^{-sn\frac{t^2}{4}} \sin\left(U_n + 1\right)\frac{t}{2}\right\} dt\right]$$

$$+ O\left[\int_{\frac{2\pi}{U_n}}^{U_n^{-\beta}} \frac{\psi(t)}{t} \left(U_n + t^3\right) dt\right]$$

$$= I_{2.1} + I_{2.2}, \text{ माना} \tag{4.8}$$

अब

$$\left| I_{2.1} \right| = O\left[\int_{\frac{2\pi}{U_n}}^{U_n^{-\beta}} \frac{|\psi(t)|}{t} \left\{ e^{-sn\frac{t^2}{4}} \left| \sin\left(U_n + 1\right)\frac{t}{2} \right| \right\} dt \right]$$

$$= O\left(e^{-\frac{\pi^2 s_n}{U_n^2}} \right) \int_{\frac{2\pi}{U_n}}^{U_n^{-\beta}} \frac{|\psi(t)|}{t} \left| \sin\left(U_n + 1\right)\frac{t}{2} \right| dt$$

$$= O(1)\left[\int_{\frac{2\pi}{U_n}}^{U_n^{-\beta}} \frac{|\psi(t)|}{t}\, dt \right]$$

$$= O(1)\left[o\left\{ \frac{1}{\alpha\left(\frac{1}{t}\right)} \right\} \right]_{\frac{2\pi}{U_n}}^{U_n^{-\beta}} + O(1) \int_{\frac{2\pi}{U_n}}^{U_n^{-\beta}} o\left\{ \frac{1}{\alpha\left(\frac{1}{t}\right)} \right\} dt$$

$$= O(1), \text{ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{4.9}$$

अपरंच

$$\left| I_{2.2} \right| = O(1) \int_{\frac{2\pi}{U_n}}^{U_n^{-\beta}} \frac{|\psi(t)|}{t} \left(U_n t^3 \right) dt$$

$$= O\left(U_n \right) \int_{\frac{2\pi}{U_n}}^{U_n^{-\beta}} |\psi(t)| \left(t^2 \right) dt$$

$$= O\left(U_n^{1-2\beta}\right) \int_{\frac{2\pi}{U_n}}^{U_n^{-\beta}} |\psi(t)|\, dt \leq O\left(U_n^{1-2\beta}\right) \int_0^{U_n^{-\beta}} |\psi(t)|\, dt$$

$$= O\left(U_n^{1-2\beta}\right) o \frac{U_n^{-\beta}}{\alpha(U_n^{\beta})}$$

$$= O\left(U_n^{1-3\beta}\right) o\left[\frac{1}{\alpha(U_n^{\beta})}\right]$$

$$= 0(1), \text{ज्यों ज्यों } n \to \infty \qquad (4.10)$$

(4.8), (4.9) तथा (4.10) से हम पाते हैं कि

$$I_2 = o(1), \text{ज्यों ज्यों } n \to \infty \qquad (4.11)$$

अन्त में हम I_3 पर विचार करते हैं। अब प्रमेयिका 2 का उपयोग करने पर

$$\left| I_3 \right| = O\left[\int_{U_n^{-\beta}}^{n} \frac{|\psi(t)|}{t} \left| \mathrm{Im}\left\{ e^{-it} \prod_{j=1}^{n} \frac{f(e^{it}) + dj}{1 + dj} \right\} \right| dt\right]$$

$$= O(1) \int_{U_n^{-p}}^{\eta} \frac{|\psi(t)|}{t}\, 0\left(e^{\frac{-c U_n t^2}{8}}\right) dt$$

$$= O\left(Un^{\beta}\right) . O\left(e^{\frac{-c U_n}{8 U_n^{2\beta}}}\right) . \int_{U_n^{-p}}^{\eta} |\psi(t)|\, dt$$

$$= o\left(Un^{\beta} . e^{\frac{-c U_n^{1-2\beta}}{8}}\right)$$

$$=o(1), \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{4.12}$$

(4.3), (4.7), (4.11) एवं (4.12) को मिलाने पर हमें वांछित परिणाम प्राप्त होता है। इस तरह हमारे प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

निर्देश

1. चन्द्रा, पी. : Summability of Fourier Series of Euler means, Publication of the Gracical Goldeano Mathematics Seminar, 1977, Vol 24, स्पैनिश, पृष्ठ 47-52.

2. हार्डी, जी. एच. : Divergent Series. Oxford at the Clarendon Press, 1949.

3. शूप, आर. ए. : Pacific J. Math, 1979, 80, 255-263.

4. स्मिथ, जी. : Canad. J. Math, 1965, 17, 506-526.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 3, July 2002.

MBT के साथ Ni (II) और Cu (II) टरथैलेट यौगिकों का संश्लेषण व अभिलक्षणन

ए. पी. मिश्रा, वी. के. तिवारी व आर. सिंघई
रसायन शास्त्र विभाग, डॉ० हरीसिंह गौर विश्वविद्यालय, सागर (म. प्र.)

[प्राप्त — मई 13, 2002]

सारांश

Ni (II) तथा Cu (II) धातु टरथैलटों का 2- मरकैप्टोबैन्जोथायाजोल (एमबीटी) के साथ संघनन कराकर इनके मिश्रित धातु टरथैलेट संकुलों का निर्माण किया गया। विभिन्न भौतिक रासायनिक विधियों — तत्व विश्लेषण, अवरक्त स्पेक्ट्रम, पराबैंगनी दृश्य स्पेक्ट्रम, डी. आर. एस., तथा चुम्बकीय मापनों के द्वारा इन संकुलों का अध्ययन किया गया। संकुलों की वर्ग समतलीय ज्यामिति सुझायी गयी है। दोनों संकुल बहुलीकृत प्रकृति वाले हैं।

Abstract

Synthesis and characterization of Ni (II) and Cu (II) terephthalate complexes wth MBT. *By* A. P. Misra, V. K. Tiwari and R. Singhai, Department of Chemistry, Dr. H. S. Gour University, Sagar (M.P.).

Complexes of Ni (II) and Cu (II) terephthalate with 2-mercaptobenzothiazole (MBT) have been synthesized and characterized through elemental analysis, infrared spectra, diffuse reflectance spectra (d. r. s.) and magnetic measurements. On the basis of above studies a square planar geometry is suggested for the complexes. Both the complexes have polymeric nature.

टरथैलेट अपनी बहुलीकृत प्रकृति व उष्मारोधी गुण के कारण बहुत उपयोगी हैं एवं औद्योगिक महत्त्व वाले भी हैं। मिश्रित धातु यौगिकों का पूर्व में विस्तृत अध्ययन किया जा चुका है तथा इनका रासायनिक उपयोग भी है। Ni (II) टरथैलेट तथा उसके उष्मीय अपघटन के बारे में बहुत पहले

अध्ययन किया गया है।[1] धातु टरथैलेट को बनाने तथा उसके मिश्रित संकुलों का भी पूर्व में विभिन्न प्रकार के अध्ययन प्रकाशित हो चुके हैं।[2,3,4] कुछ मिश्रित धातु टरथैलेट संकुलों का उष्मीय अध्ययन भी किया गया है।[5] यहाँ पर Ni (II) व Cu (II) धातु टरथैलेटों का MBT के साथ संकुल बनाया गया है तथा उसका विभिन्न प्रकार से भौतिक-रासायनिक अभिलक्षणन अध्ययन किया गया है। पूर्व में विभिन्न शोधकर्ताओं ने MBT के साथ विभिन्न धातुओं के संकुल बनाकर व्यापक अध्ययन किया है[6-8] लेकिन प्रस्तुत पत्र में Ni (II) तथा Cu (II) धातु टरथैलेट के साथ संकुल बनाये गये हैं जो साहित्य में वर्णित नहीं है।

प्रयोगात्मक

Ni (II) एवं Cu (II) के धातु टरथैलेट तथा लिगैण्ड की अभिक्रिया द्वारा संकुल बनाये गये। धातु टरथैलेट के निर्माण के लिये निकेल सल्फेट, कापर सल्फेट, टरथैलिक एसिड तथा सोडियम बाइकार्बोनेट का प्रयोग किया गया एवं 2-मरकैप्टोबेन्जोथायाजोल (MBT) का लिगैण्ड के रूप में प्रयोग किया गया। संकुलों के निर्माण में प्रयुक्त सभी अभिकर्मक वैश्लेषिक कोटि के थे।

धातु यौगिकों का निर्माण — धातु यौगिक का संश्लेषण निकेल टरथैलेट/कापर टरथैलेट के साथ लिगैण्ड (MBT) को 1:2 में जलीय मेथेनॉलिक विलयन के संघनन द्वारा प्राप्त किया जाता है। धातु टरथैलेट का निर्माण पूर्व में साहित्य[3,4] में वर्णित विधि द्वारा किया गया है। यौगिकों के संश्लेषण के दौरान अभिक्रिया विलयन का पी एच 4.5-5.5 के बीच रखा गया। इसके लिये 0.1N HCl थोड़ी मात्रा में मिलाया गया। अभिक्रिया विलयन को एक जलउष्मक पर लगभग 6-7 घंटे पश्चवाहक यंत्र में गर्म किया गया। प्राप्त रंगीन अवक्षेप को ठण्डा होने के लिये रखा गया। इसे छाना गया और फिर क्रमशः इथेनाल और ईथर से 2-3 बार धोया गया। संकर यौगिक को डेसीकेटर में निर्जल कैल्सियम क्लोराइड पर तथा ओवन में 70°C पर सुखाया गया।

यौगिकों के कार्बन, हाइड्रोजन व नाइट्रोजन तत्त्वों के विश्लेषण आई. आर. एवं. डी. आर. एस. के लिये, ई. डी. आर. आई. लखनऊ भेजा गया। चुम्बकीय मापनों के लिये गॉय विधि का प्रयोग किया गया है।

परिणाम तथा विवेचना

तत्त्व विश्लेषण के आधार पर आण्विक सूत्र का निर्धारण किया गया। Ni (II) संकुल में धातु तथा लिगेण्ड का अनुपात 1:2 एवं Cu (II) संकुल में यह 2:3 प्राप्त हुआ। संकर यौगिक सामान्य रासायनिक विलायकों में अघुलनशील या आंशिक घुलनशील थे अतः आण्विक चालकता नहीं निकाली जा सकी।[2-5]

अवरक्त अवशोषण स्पेक्ट्रम — लिगैण्ड (MBT) के अवरक्त अवशोषण बैण्ड साहित्य[6-8] में वर्णित अध्ययन द्वारा प्राप्त किये गये जिससे संश्लेषित संकुलों का तुलनात्मक अध्ययन किया जा सके। लिगैण्ड में एक बैण्ड 3100 cm^{-1} पर υN-H के द्वारा और थायामाइड समूह द्वारा 1600, 1505,

1465, तथा 1310cm^{-1} पर कुछ बैण्ड प्राप्त होते हैं। 1600-1505 cm^{-1} पर υ (N-C = S) के द्वारा प्राप्त बैण्ड आता है। संकुल यौगिकों में एक बैण्ड 2900-2950cm^{-1} पर υ N-H व υOH (हाइड्रोजन बन्धित) के द्वारा प्रदर्शित होता है जबकि 1580, 1480 ± 10, 1410±10, 1300, 1270±10 व 1060±10 cm^{-1} पर प्राप्त बैण्ड नाइट्रोजन और सल्फर द्वारा किलेटीकरण दर्शाते हैं क्योंकि लिगैण्ड द्वारा प्राप्त बैण्डों की तुलनात्मक स्थिति देखने पर इनकी आवृत्तियों में स्थिति का अन्तर व तीव्रता का अन्तर था। υ C = N व υ C = S बैण्ड संकुलों में निम्न आवृत्ति क्षेत्र में स्थापित हो गये। टरथैलेट ऋणायन के द्वारा प्राप्त बैण्ड आवृत्तियों में संकुलों में मापनीय परिवर्तन नहीं हुआ जो यह दर्शाता है कि टरथैलेट ऋणायन ने संकुल निर्माण में किलेटीकरण में भाग नहीं लिया। Cu (II) संकुल के अवरक्त अवशोषण स्पेक्ट्रा में 3150 cm^{-1} पर एक बैण्ड व 710 cm^{-1} पर एक तीव्र बैण्ड संयोजी जल को दर्शाता है। Ni (II) संकुल में केवल एक बैण्ड ~ 3150 cm^{-1} पर वृहद रूप में आता है।[9, 10]

कम आवृत्ति वाले क्षेत्र में कुछ नये बैण्ड संकुलों के स्पेक्ट्रा में दिखायी देते हैं। Ni (II संकुल में 430 cm^{-1} व 300 cm^{-1} पर जो बैण्ड आते हैं वे υ M-N व υ M-S के हैं तथा Cu (II) संकुल में 400 cm^{-1}, 530 cm^{-1} व 290 cm^{-1} पर जो बैण्ड आते हैं वे υ M-O, υ M-N व υ M-S को दर्शाते हैं।[6-10]

चुम्बकीय मापनों में संकुल Ni (II) की प्रतिचुम्बकीय प्रकृति[11, 12] प्राप्त होती है जो संकुल की वर्ग समतलीय ज्यामिति प्रमाणित करते हैं। Ni (II) संकुल के इलेक्ट्रानिक स्पेक्ट्रा (डी आर एस) द्वारा भी यह बात प्रमाणित[11, 12] है जिसमें तीन बैण्ड 12195 cm^{-1} 17543 cm^{-1} तथा 25641 cm^{-1} पर प्राप्त होते हैं। ये बैण्ड $^1A_{1g}, \rightarrow {}^1E_g$ (υ1), $^1A_{1g} \rightarrow {}^1B_{2g}$ (υ2) एवं $^1A_{1g} \rightarrow {}^1B_{1g}$ (υ3) संक्रमण को दर्शाते हैं। Cu (II) संकुल के इलेक्ट्रानिक स्पेक्ट्रा (डी आर एस) में दो बैण्ड 12658

सारणी 1

यौगिकों के वैश्लेषिक एवं चुम्बकीय आंकड़े

आण्विक सूत्र	$[NiL_2]$ T.H_2O L = C_7 H_5 NS_2 T = C_8 II_4 O_8	$[Cu_2 L_2 (H_20)_2]$ T_2 L = C_7 H_5 NS_2 T = C_8 II_4 O_8
अणुभार	575.0	992.70
रंग	हल्का भूरा	गंदला पीला
गलनांक बिन्दु	> 300 (विघटित)	> 310 (विघटित)
तत्त्व विश्लेषण : प्राप्त परिगणित	C H N M 45.23 2.63 4.99 9.88 (45.91) (2.76) (4.86) (10.17)	C H N M 43.61 2.63 4.03 12.24 (44.72) (2.71) (4.23) (12.79)
चुम्बकीय आंकड़े : ताप (K) μ eff. (B,M) $\chi_M (10^{-6})$	303 1.60 1054.93	303 — —

cm^{-1} व 18181 cm^{-1} आते हैं जो $^1B_{1g} \rightarrow {}^2B_{2g}$ व $^2B_{ig} \rightarrow {}^2E_g$ संक्रमण को दर्शाते हैं। यह वर्ग समतलीय ज्यामिति[11, 12] को सिद्ध करता है। Cu (II) संकुल का चुंबकीय आघूर्ण 1.60 बी. एम. प्राप्त हुआ। चुंबकीय मापनों द्वारा प्राप्त आंकड़े उच्च गलनांक तथा संकुलों का अघुलनशील व्यवहार दोनों संकुलों के बहुलीकृत[2-5] व्यवहार को दर्शाता है।

सारणी 2

धातु यौगिकों के अवरक्त अवशोषण बैण्ड

यौगिक	Ni (II) यौगिक (cm^{-1})	Cu (II) यौगिक cm^{-1})
एरोमैटिक रिंग कम्पन	1580 (m) 1490 (m), 740 (s)	1580, 1490 (m) 750 (s)
N-H (-OH & N-H हाइड्रोजन बंधित)	-2950 (br)	-2990 (br)
थायामाइड (i)		
(ii)	1580	1580
(iii)	1410	1390
$\upsilon C = N, \upsilon C = S$	1060 (m) 1490	1070 (ms) 1470 (m)
$\upsilon C = S$, SNCS	1270 (m)	1280 (m)
COO^- (कार्बोक्सिलेट)	1680 (mbr) 1390 (s)	1680 (mbr) 1380 (m)
H_2O	~ 3150 (br)	3150 (br) 710 (s)
M-O	—	400 (m)
M-N	430 (mw)	530 (m)
M-S	300 (w)	290 (w)

निर्देश

1. एकेन्सन, आर. जे. तथा गैल्वे, ए. के. : जर्न. अमे. सोसा. 1967, (A), 1174.
2. शर्मा, सी. एल. डे. टी. के. तथा सिंह, ए. के. : इण्डि. जर्न. केमि., 1979, 18A, 183.
3. मिश्रा, ए. पी., तिवारी, वी. के., सिंघई, आर. तथा गौतम, एस. : विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका, 2000, 43 (3), 165.
4. मिश्रा, ए. पी., तिवारी, वी. के. तथा सिंघई आर. विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका, 2001, 44 (4), 303.
5. मिश्रा, ए. पी., तिवारी, वी. के. तथा सिंघई, आर., इण्डि. जर्नल केमि. 2002, (प्रेस में).
6. अल-शैजी, एम.एफ., सालेम, टी. तथा अल-सायेद, एम. ए., इनार्ग. किम. एक्टा, 1978, 29, 155.
7. लोजानो, आर., रोमन, जे., रागेल वी. तथा रामीरेज एम. सी., सिन्थे रिएट, इनआर्ग. मेट-आर्ग. कैम., 1989, 19 (2) 125.

8. लोब, बी., क्रिवेली, आई., तथा एन्ड्राडे, सी., सिन्थे. रिएक्ट. इनआर्ग. मेट-आर्ग. कैम., 1991, 21 (2), 331.

9. नाकामेटो, के., ''इन्फ्रारेड स्पेक्ट्रा आफ इनआर्गेनिक एण्ड कोआर्डिनेशन कम्पाउन्डस'', चतुर्थ संस्करण, (विले-इण्टरसाइन्स, न्यूयार्क) 1986.

10. सिल्वरस्टीन, आर. एन. बैसलर, जी. सी. तथा मरिलटी, ''स्पेक्ट्रोमीट्रिक आइडेन्टीफिकेशन आफ आर्गेनिक कम्पाउन्डर्स,'' चतुर्थ संस्करण, (विले-न्यूयार्क), 1981.

11. दत्ता, आर. एल. तथा श्यामल, ए., ''एलीमेन्टस आफ मैग्नेटोकैमिस्ट्री'', द्वितीय संस्करण, (ईस्ट वेस्ट — न्यू दिल्ली) 1993, 82, 123, 150, 157.

12. लिवर, ए. बी. पी., ''इनआर्गेनिक इलेक्ट्रोनिक स्पेक्ट्रोस्कोपी'', द्वितीय संस्करण (एल्सेवियर-एम्सटर्डम), 1984.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 3, July 2002.

अस्थायी चुम्बक ध्रुवीय मुक्त संवहन प्रवाह

एन. सी. जैन तथा राजीव तनेजा
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर (राज.)

[प्राप्त — फरवरी 4, 2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य एक सरन्ध्र माध्यम में से होकर अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र के प्रभाव के अन्तर्गत एक अर्ध अपरिमित ऊर्ध्वाधर सरन्ध्र प्लेट पर विद्युत चालक श्यान असंपीड्य ध्रुवीय तरल के अस्थायी मुक्त संवहन प्रवाह को ज्ञात करना है। वेग, ताप, माध्य कोणीय वेग, उपरिस्तर घर्षण तथा उष्मा स्थानान्तरण की दर के लिए सन्निकट हल प्राप्त किये गये हैं। वेग, क्षेत्र, उपरिस्तर घर्षण तथा उष्मा स्थानान्तरण दर पर ग्रासहाफ संख्या (G_r), माध्यम की प्रवेश्यता (K), घूर्णनीय प्राचलों (α तथा λ) तथा चुम्बकीय प्राचल (M) के प्रभावों की व्याख्या दी गई है।

Abstract

On unsteady magnetopolar free convection flow. *By* N. C. Jain and Rajeev Taneja, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaiput (Raj.)

This paper is concerned with unsteady free convection flow of an electrically conducting viscous incompressible polar fluid through a porous medium, over a semi-infinite vertical porous plate under the action of a transverse magnetic field. Approximate solutions have been obtained for a velocity, temperature, mean angular velocity, skin friction and the rate of heat transfer. The effects of Grashof number (G_r), permeability of the medium (K), rotational parameters (α and λ) and the magnetic parameter (M) are shown on velocity field, skin friction and rate of heat transfer are discussed numerically.

1. प्रस्तावना

यह ज्ञात है कि भूउष्मीय क्षेत्र में तरल विद्युतसंचालन करते हैं। इसलिए ताप अन्तर से उत्पन्न होने वाले प्रवाहों का महत्व न केवल उनके अपने लिए है अपितु भूभौतिकी एयरोनाटिक्स तथा

इंजीनियिरी में उनके सम्प्रयोग हैं। ऐसे प्रवाहों के अनेक रोचक पहलू हैं अतः ऐसी समस्या का वैश्लेषिक हल कई लेखकों द्वारा प्रस्तुत किया गया है।[1-4] प्रकृति में सरंध्र माध्यम से होकर प्रवाह अत्यधिक प्रचलित है इसलिए ऐसे प्रवाहों के अध्ययन का महत्त्व अनेक वैज्ञानिक तथा इंजीनियरी समस्याओं में है। अन्य अध्ययनों में[5-11] प्रवाह के विविध पक्षों पर विचार हुआ है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य एक सरन्ध्र माध्यम में से होकर एक असंपीड्य श्यान तथा विद्युत चालक तरल के मुक्त संवहन प्रवाह का अध्ययन करना है।

ग्रासहाफ संख्या (Gr), प्रवेश्यता प्राचल (K), चुम्बकीय प्राचल (M), घूर्णीय प्राचल (α तथा λ) के प्रभावों को वेग क्षेत्र, उपरिस्तर घर्षण तथा उष्मा स्थानान्तरण दर पर दिखाया गया है और उनकी सांख्यिक विवेचना की गई है।

2. सूत्रीकरण तथा हल

हम एक विद्युत चालक ध्रुवीय तरल के दो विमीय अस्थिर जलचुम्बकीय मुक्त संवहन प्रवाह को, जो एक अपरिमित ऊर्ध्व प्लेट द्वारा बद्ध दिक के अर्ध अपरिमित क्षेत्र को घेरने वाले सरंध्र माध्यम में से होकर हो रहा है उस पर विचार करेंगे। यह प्लेट सरंध्र है और प्लेट का लम्बवत् चूषण इसकी ओर अभिमुख है और यह आवृत्ति n के साथ विचरण करती है जो एक गैर शून्य अचर माध्य V_0 पर समय के साथ चरघातांकी रीति से घटती है। प्रवाह की अनुप्रस्थ दिशा में एकसम शक्ति का चुम्बकीय क्षेत्र प्रयुक्त किया जाता है और प्रेरित चुम्बकीय क्षेत्र को उपेक्षणीय मान लेते हैं। ऊर्ध्व सरन्ध्र प्लेट की ऊर्ध्व दिशा में लम्बाई को x अक्ष मानकर और y अक्ष को इसके लम्बवत् मानकर तरल गति के समीकरण जो इस समस्या को नियन्त्रित करते हैं, वे हैं —

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta\left(T - T_\infty\right) + \left(\nu + \nu_r\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\nu_r\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\nu}{K}u - \frac{\sigma}{\rho}B_0^2 u \tag{2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\gamma}{I}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho C_p}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{C_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{4}$$

जिनके परिसीमा प्रतिबन्ध हैं—

$$u = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad T = Tw \quad y=0 \quad \text{पर}$$

$$u \to 0, \quad \omega \to 0, \quad T \to T_\infty \quad \text{ज्यों ज्यों } y \to \infty \tag{5}$$

जहाँ V_r शुद्ध गतिक घूर्णन श्यानता, ω कणों के घूर्णन का माध्य कोणीय वेग, K सरंध्र माध्यम की प्रवेश्यता, σ वैद्युतचालकता, B_0 चुम्बकीय प्रेरण, β आयतन प्रसार का गुणांक, k उष्मीय चालकता, I अदिश अचर है जो इकाई द्रव्यमान के जड़त्व घूर्णन की विमा वाला है तथा

$$\gamma = \frac{C_a + C_d}{I}$$

जहाँ C_a तथा C_d बलयुग्म प्रतिबलश्यानताओं के गुणांक हैं। शेष प्रतीकों के पूर्ववत् अभिप्राय हैं।

उपर्युक्त परिसीमा प्रतिबन्धों को इन कल्पनाओं से प्राप्त किया जाता है कि कणों के घूर्णन के समय बलयुग्म प्रतिबल प्रमुख होते हैं।[8]

समीकरण (1) से v का स्वरूप

$$v = -v_o\left[1 + A\varepsilon\, e^{-nt}\right] \tag{6}$$

हो सकता है जहाँ A वास्तविक धन अचर है और ε लघु है जिससे कि $A\varepsilon \le 1$

हम निम्नांकित अ-विमीय संख्याओं को प्रयुक्त करेंगे

$$y^* = \frac{v_0 y}{\nu} \qquad u^* = \frac{u}{v_o} \qquad T^* = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

$$G_r = \frac{\nu g \beta (T_w - T_\infty)}{v_o^3} \qquad K^* = \frac{v_o^2 K}{\nu^2} \qquad E = \frac{v_o^2}{C_p (T_w - T_\infty)}$$

$$M^2 = \frac{\sigma B_0^2 \nu}{\rho v_o} \qquad P_r = \frac{\rho \nu C_p}{k} \qquad \alpha = \frac{\nu_r}{\nu}$$

$$\lambda = \frac{I \nu}{\gamma} \qquad \omega_1 = \frac{\nu \omega}{v_o^2} \qquad t^* = \frac{v_0^2 t}{\nu} \qquad n^* = \frac{\nu n}{v_0^2} \tag{7}$$

(2), (3) तथा (4) में (6) को प्रतिस्थापित करने पर ये समीकरण (7) के अनुसार तारक चिन्हों को हटाने पर निम्नवत् समानीत हो जाते हैं।

$$(1 + \alpha) u'' + \left[1 + A \varepsilon e^{-nt} \right] u' = - G_r T - 2 \alpha \omega'_1 + \left(\frac{1}{K} + M^2 \right) u + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8)$$

$$\omega''_1 + \lambda \left[1 + A \varepsilon e^{-nt} \right] \omega'_1 = \lambda \frac{\partial \omega_1}{\partial t} \quad (9)$$

$$T''_1 + P_r \left[1 + A \varepsilon e^{-nt} \right] T' = P_r \frac{\partial T}{\partial t} - P_r E u'^2 \quad (10)$$

जहाँ पर प्राइमों द्वारा y के प्रति अवकलन का बोध होता है।

परिसीमा प्रतिबन्ध (5) का रूप हो जाता है—

$$u = 0, \quad \omega'_1 = - u'', \quad T = 1 \quad y=0 \quad \text{पर}$$

$$u \to 0, \quad \omega_1 \to 0, \quad T \to 0 \quad \text{ज्योंज्यों} \quad y \to \infty \quad (11)$$

(8) से लेकर (10) तक के समीकरणों को हल करने के लिए हम कल्पना करते हैं—

$$\left. \begin{aligned} u(y, t) &= u_o(y) + \varepsilon e^{-nt} u_1(y) \\ \omega_1(y, t) &= g_o(y) + \varepsilon e^{-nt} g_1(y) \\ T(y, t) &= T_o(y) + \varepsilon e^{-nt} T_1(y) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(8) से लेकर (10) में (12) को प्रतिस्थापित करने तथा मानक विधि का अनुसरण करने पर हमें निम्नांकित समीकरण प्राप्त होते हैं–

$$(1 + \alpha) u''_o + u'_o = - G_r T_0 - 2 \alpha g'_1 + \left(\frac{1}{K} + M^2 \right) u_o \quad (13)$$

$$(1+\alpha)u''_1 + u'_1 + A u'_o = -G_r T_1 - 2\alpha g'_2 + \left(\frac{1}{K} + M^2\right) u_1 - n u_1 \quad (14)$$

$$g''_o + \lambda g'_o = 0 \quad (15)$$

$$g''_1 + \lambda g'_1 + n\lambda g'_1 = -A\lambda g'_o \quad (16)$$

$$T''_o + P_r T'_o = -P_r E u'^2_0 \quad (17)$$

$$T''_1 + P_r T'_1 + n P_r T_1 = -P_r A T'_o - 2 P_r E u'_o u'_1 \quad (18)$$

जिनके परिसीमा प्रतिबन्ध हैं

$$u_o = 0, \quad u_1 = 0, \quad g'_o = u''_o, \; g'_1 = u''_1$$

$$T_o = 1, \quad T_1 = 0 \quad y=0 \text{ पर}$$

$$u_o \to 0, \quad u_1 \to 0, \quad g_o \to 0, \quad g_1 \to 0$$

$$T_o \to 0, \quad T_1 \to 0 \text{ ज्यों ज्यों } y \to \infty \quad (19)$$

परिसीमा प्रतिबन्ध (19) के अन्तर्गत ω_1 के हल को समीकरण (15) तथा (16) से निम्नवत् लिखा जा सकता है।

$$\omega_1 = A_1 e^{-\lambda y} + \varepsilon e^{-nt}\left\{ B_1 e^{m_2 y} + \frac{A A_1 \lambda}{n} e^{-\lambda y} \right\} \quad (20)$$

समीकरणों (13), (14), (17) तथा (18) की प्रणाली को जो युग्मित तथा अरैखिक हैं, हल करने के लिए हम u_0, u_1, T_o तथा T_1 को एकर्ट संख्या E के घातों के रूप में प्रसार करते हैं—

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= u_{oo} + E\,u_{01} + O(E^2) \\ u_1 &= u_{1o} + E\,u_{11} + O(E^2) \\ T_0 &= T_{oo} + E\,T_{01} + O(E^2) \\ T_1 &= T_{1o} + E\,T_{11} + O(E^2) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

(21) को ध्यान में रखते हुए (13), (14), (17) एवं (18) समीकरणों के हल संगत परिसीमा प्रतिबन्धों का उपयोग करने पर—

$$\begin{aligned} u = {} & L_1\left(e^{R_1 y} - e^{-P_r y}\right) - A_1 L_2\left(e^{R_1 y} - e^{-\lambda y}\right) + E\Big\{L_{21}\,e^{R_1 y} + L_{14}\,e^{2R_1 y} \\ & + L_{15}\,e^{-2P_r y} + L_{16}\,e^{(R_1 - P_r)y} + L_{17}\,e^{-2\lambda y} + L_{18}\,e^{(R_1-\lambda)y} \\ & + L_{19}\,e^{-(P_r+\lambda)y} + L_{20}\,e^{-P_r y}\Big\} + \varepsilon\,e^{-nt}\Big[L_{31}\,e^{R_3 y} + L_{23}\,e^{R_3 y} \\ & + \left(L_{24} + L_{28}\right)e^{-P_r y} + L_{25}\,e^{m_1 y} + \left(L_{26} + L_{30}\right)e^{-\lambda y} + \left(L_{27} + L_{29}\right)e^{-R_1 y} \\ & + E\Big\{L_{76}\,e^{R_5 y} + L_{58}\,e^{R_3 y} + L_{39}\,e^{-P_r y} + L_{60}\,e^{2R_1 y} + L_{61}\,e^{-2P_r y} \\ & + L_{62}\,e^{(R_1-P_r)y} + L_{63}\,e^{-2\lambda y} + L_{64}\,e^{(R_1-\lambda)y} + L_{65}\,e^{-(P_r+\lambda)y} \\ & + L_{66}\,e^{(R_1+R_5)y} + L_{67}\,e^{(R_1+R_3)y} + L_{68}\,e^{(R_1+m_1)y} + L_{69}\,e^{(R_5+R_r)y} \\ & + L_{70}\,e^{(R_3-P_r)y} + L_{71}\,e^{(m_1-P_r)y} + L_{72}\,e^{(R_5-\lambda)y} + L_{73}\,e^{(R_3-\lambda)y} \\ & + L_{74}\,e^{(m_1-\lambda)y} + L_{75}\,e^{R_1 y)}\Big\}\Big) \end{aligned} \tag{22}$$

$$T = e^{-P_r y} + E\Big\{ L_{13} e^{-P_r y} + L_3 e^{2P_r y} + L_4 e^{-2P_r y} + L_5 e^{(R_1 - P_r)y}$$

$$+ L_6 e^{2R_1 y} + L_7 e^{-2\lambda y} + L_8 e^{(R_1 - \lambda)y} + L_9 e^{2R_1 y} + L_{10} e^{(R_1 - \lambda)y}$$

$$+ L_{11} e^{(R_1 - P_r)y} + L_{12} e^{-(P_r + \lambda)y} \Big\} + \varepsilon e^{-nt} \Big[L_{22}\Big(e^{R_3 y} - e^{-P_r y} \Big)$$

$$+ E\{\{ L_{37} e^{R_3 y} + L_{32} e^{-P_r y} + \Big(L_{33} + L_{44}\Big) e^{2R_1 y} + \Big(L_{34} + L_{47}\Big) e^{-2P_r y}$$

$$+ \Big(L_{35} + L_{41} + L_{50}\Big) e^{(R_1 - P_r)y} + \Big(L_{36} + L_{55}\Big) e^{-2\lambda y}$$

$$+ \Big(L_{37} + L_{43} + L_{56}\Big) e^{(R_1 - \lambda)y} + \Big(L_{38} + L_{49} + L_{53}\Big) e^{-(P_r + \lambda)y}$$

$$+ L_{39} e^{(R_1 + R_5)y} + L_{40} e^{(R_1 + R_3)y} + L_{42} e^{(R_1 + m_1)y} + L_{45} e^{(R_1 - P_r)y}$$

$$+ L_{46} e^{(R_3 - P_r)y} + L_{48} e^{(m_1 - P_r)y} + L_{51} e^{(R_5 - \lambda)y}$$

$$+ L_{52} e^{(R_3 - \lambda)y} + L_{54} e^{(m_1 - \lambda)y} \Big\} \Big] \qquad (23)$$

जहाँ कि L_i, $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots 76$ $R_{j,K}$, $j = 1, 3, 5$, $K = 2, 4, 6$, m_1, m_2, A_1 . तथा B_1 अचरों को परिशिष्ट में परिभाषित किया गया है। जब हम $A = 0$ रखते हैं अर्थात् समीकरण (22) तथा (23) में स्थिर चूषण की दशा में हमें u तथा T के वही मान मिलते हैं जो जैन तथा तनेजा के हैं।[12] समीकरण (22) से हम उपरिस्तर घर्षण को निम्नवत् परिगणित कर सकते हैं—

समीकरण (22) से हम उपरिस्तर घर्षण ने निम्नवत् परिगणित कर सकते हैं–

$$\tau = \frac{\tau_w}{\rho v_o^2} = (1 + \alpha)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = (1 + \alpha)\Big[L_1\Big(R_1 + P_r\Big) - A_1 L_2\Big(R_1 + \lambda\Big)$$

$$+ E\Big\{ R_1 L_{21} + 2 R_1 L_{14} - 2 P_r L_{13} + \Big(R_1 - P_r\Big) L_{16} - 2 \lambda L_{17}$$

$$+ \Big(R_1 - \lambda\Big) L_{18} - \Big(P_r + \lambda\Big) L_{19} - P_r L_{20} \Big\} + \varepsilon e^{-nt} \Big\{ R_5 L_{31} + R_3 L_{23}$$

$$- P_r \Big(L_{24} + L_{28}\Big) + m_1 L_{25} - \lambda \Big(L_{26} + L_{30}\Big) + R_1 \Big(L_{27} + L_{29}\Big)$$

$$+ E\Big(R_5 L_{76} + R_3 L_{58} - P_r L_{59} + 2 R_1 L_{60} - 2 P_r L_{61} + \Big(R_1 - P_r\Big) L_{62}$$

$$- 2 \lambda L_{63} + \Big(R_1 - \lambda\Big) L_{64} - \Big(P_r + \lambda\Big) L_{65} + \Big(R_1 + R_5\Big) L_{66}$$

$$+ \Big(R_1 + R_3\Big) L_{67} + \Big(R_1 + m_1\Big) L_{68} + \Big(R_5 - P_r\Big) L_{69} + \Big(R_3 - P_r\Big) L_{70}$$

$$+ \Big(m_1 - P_r\Big) L_{71} + \Big(R_5 - \lambda\Big) L_{72} + \Big(R_3 - \lambda\Big) L_{73}$$

$$+ \Big(m_1 - \lambda\Big) L_{74} + R_1 L_{75} \Big) \Big\} \Big\} \qquad (24)$$

समीकरण (23) से हम उष्मा स्थानान्तरण की दर को नुसेल्ट संख्या के रूप में निम्नवत् परिगणित कर सकते हैं–

$$Nu = -\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = P_r + E\Big\{ - 2 R_1 \Big(L_3 + L_6 + L_9\Big) + 2 P_r L_4$$

$$- \Big(R_1 - P_r\Big)\Big(L_5 + L_{11}\Big) + 2 \lambda L_7 - \Big(R_1 - \lambda\Big)\Big(L_8 + L_{10}\Big)$$

$$+ \Big(P_\tau + \lambda\Big) L_{12} + P_r L_{13} \Big\} + \varepsilon e^{-nt} \Big[- \Big(R_3 + P\Big) L_{22} + E\Big\{ - R_3 L_{57}$$

$$+ P_r L_{32} - 2R_1\left(L_{33} + L_{44}\right) + 2P_r\left(L_{34} + L_{47}\right) - \left(R_1 - P_r\right)$$

$$\times \left(L_{35} + L_{41} + L_{50}\right) + 2\lambda\left(L_{36} + L_{55}\right) - \left(R_1 - \lambda\right)\left(L_{37} + L_{43} + L_{56}\right)$$

$$+ \left(P_r + \lambda\right)\left(L_{38} + L_{49} + L_{53}\right) - \left(R_1 + R_5\right)L_{39} - \left(R_1 + R_3\right)L_{40}$$

$$- \left(R_1 + m_1\right)L_{42} - \left(R_3 - P_r\right)L_{45} - \left(R_3 - P_r\right)L_{46} - \left(m_1 - P_r\right)L_{48}$$

$$- \left(R_5 - \lambda\right)L_{51} - \left(R_3 - \lambda\right)L_{52} - \left(m_1 - \lambda\right)L_{54}\Big\}\Big] \qquad (25)$$

3. विवेचना तथा निष्कर्ष

भौतिक हल को समझने के लिए हमने वेग वितरण (चित्र 1 तथा 2) प्लेट पर उपरिस्तर घर्षण (चित्र 3 तथा 4) तथा प्लेट पर उष्मा स्थानान्तरण की दर (चित्र 5 तथा 6) के सांख्यिक मानों की परिगणना की है जो K (प्रवेश्यता प्राचल), M (चुम्बकीय प्राचल), G_r (ग्रेशाफ संख्या), A (चूषण वेग आयाम), E (एकर्ट संख्या), P_r (प्रेंडल संख्या), n, t, ε तथा चाक्रिक प्राचल α तथा λ के विभिन्न मानों के लिए हैं।

चित्र 1 में वेग वितरण को $E = 0.01, P_r = 7.0, n = 0.1, t = 1.0, \varepsilon = 0.2$ तथा $A = 0.4$ के लिए y के विरुद्ध आलेखित किया गया है। यह देखा जाता है कि जब M तथा λ में वृद्धि की जाती है तो वेग घट जाता है किन्तु K, α तथा G_r के सन्दर्भ में यह घटना उलट जाती है।

चित्र 2 में वेग वितरण को $E = 0.01, K = 0.6, M = 1.0, \alpha = 0.30, \lambda = 2.0$ तथा $G_r = 5.0$ के लिए y के विरुद्ध आलेखित किया जाता है। यह देखा जाता है कि जब t, P_r तथा A में वृद्धि की जाती है तो वेग घटता है किन्तु ε तथा n में वृद्धि होने से वेग बढ़ता है।

चित्र 3 में उपरिस्तर घर्षण को $E = 0.01, P_r = 7.0, n = 0.1, t = 1.0, \varepsilon = 0.2$ एवं $A = 0.4$. के लिए K के विरुद्ध आलेखित किया गया है। यह देखा जाता है कि जब M, α तथा G_r में वृद्धि की जाती है जो उपरिस्तर घर्षण घटता है किन्तु λ के मामले में यह घटना उलट जाती है।

——— A = 0.4

- - - - A = 0.0

No.	K	M	α	λ	Gr
1	0.6	1.0	0.30	2.0	5.0
2	1.4	1.0	0.30	2.0	5.0
3	0.6	1.75	0.30	2.0	5.0
4	0.6	1.75	0.35	2.0	5.0
5	0.6	1.75	0.35	5.0	5.0
6	0.6	1.75	0.35	5.0	10.0

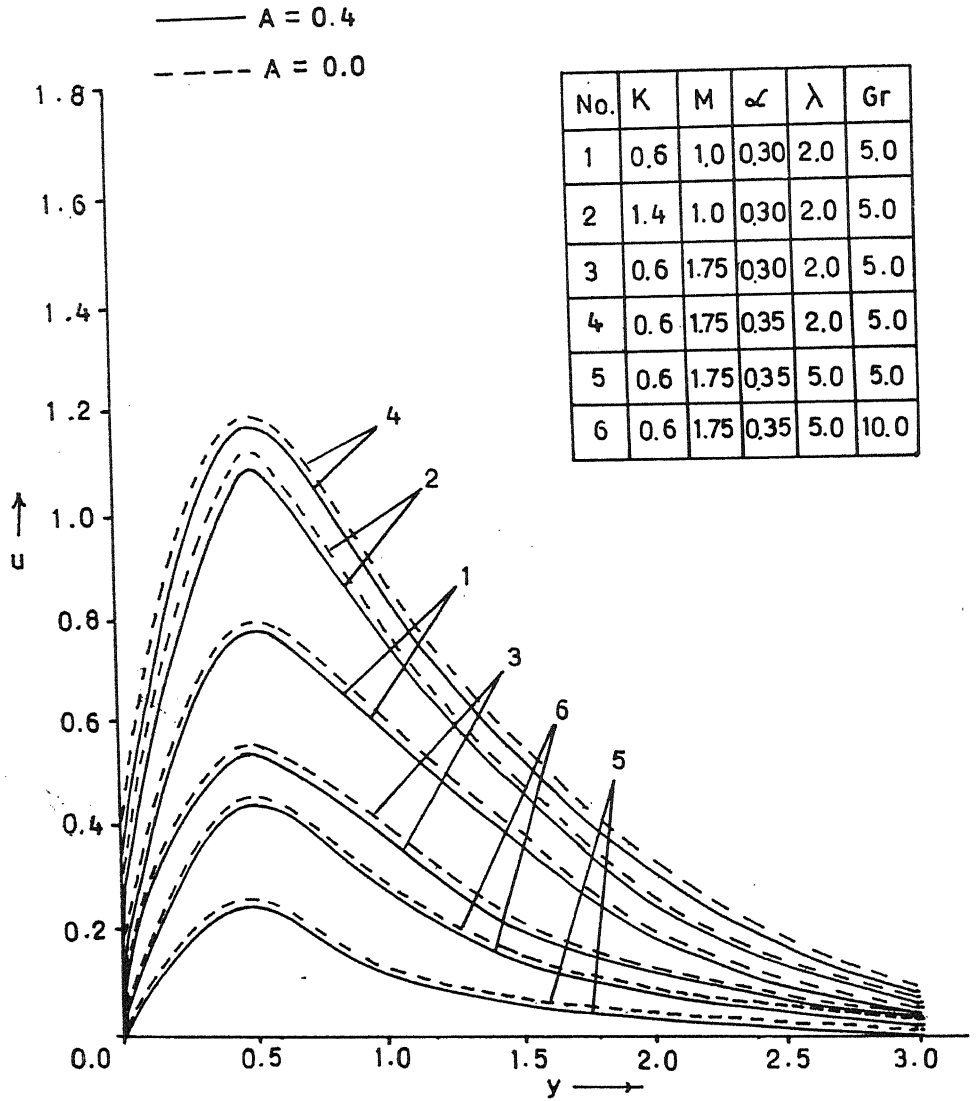



Fig. 1 Velocity distribution u plotted against y for different values of K, M, α, λ and Gr

Fig. 2 Velocity distribution u plotted against y for different values of ϵ, n, t, Pr and A

No.	M	α	λ	Gr
1	1.0	0.30	2.0	5.0
2	1.75	0.30	2.0	5.0
3	1.0	0.35	2.0	5.0
4	1.0	0.35	5.0	5.0
5	1.0	0.35	5.0	10.0

Fig. 3 Skin friction τ plotted against K for different values of M, α, λ and Gr

No	ϵ	n	t	Pr	A
1	0.2	0.1	1.0	7.0	0.4
2	0.4	0.1	1.0	7.0	0.4
3	0.2	0.2	1.0	7.0	0.4
4	0.2	0.2	2.0	7.0	0.4
5	0.2	0.2	2.0	10.0	0.4
6	0.2	0.2	2.0	10.0	0.8

Fig. 4 Skin-friction τ plotted against K for different values of ϵ, n, t, Pr and A

No.	M	α	λ	Gr
1	1.0	0.30	2.0	5.0
2	1.75	0.30	2.0	5.0
3	1.0	0.35	2.0	5.0
4	1.0	0.35	5.0	5.0
5	1.0	0.35	5.0	10.0

Fig.5 Rate of heat transfer Nu plotted against K for different values of M, α, λ and Gr

No.	ε	n	t	Pr	A
1	0.2	0.1	1.0	7.0	0.4
2	0.4	0.1	1.0	7.0	0.4
3	0.2	0.2	1.0	7.0	0.4
4	0.2	0.2	2.0	7.0	0.4
5	0.2	0.2	2.0	10.0	0.4
6	0.2	0.2	2.0	10.0	0.8

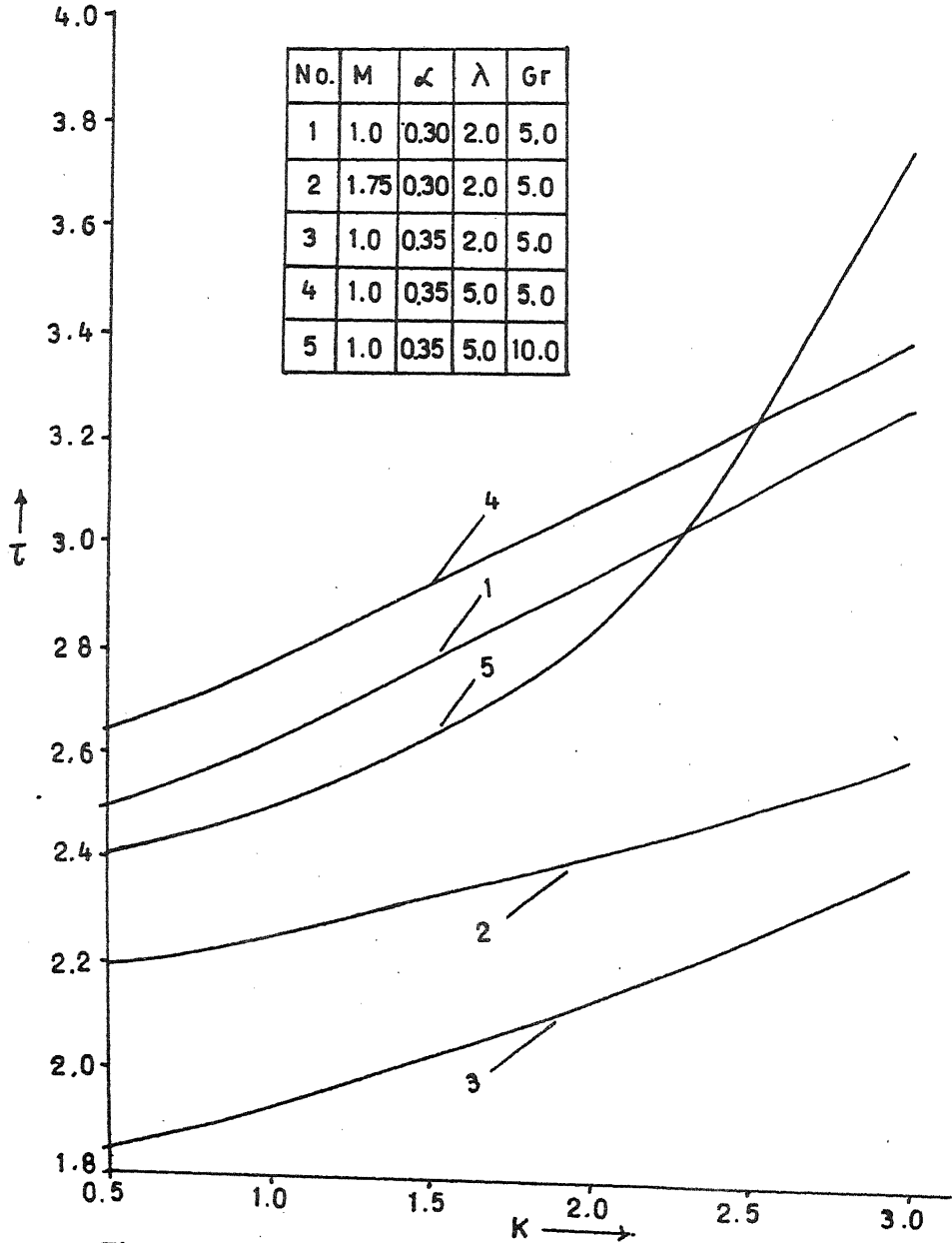
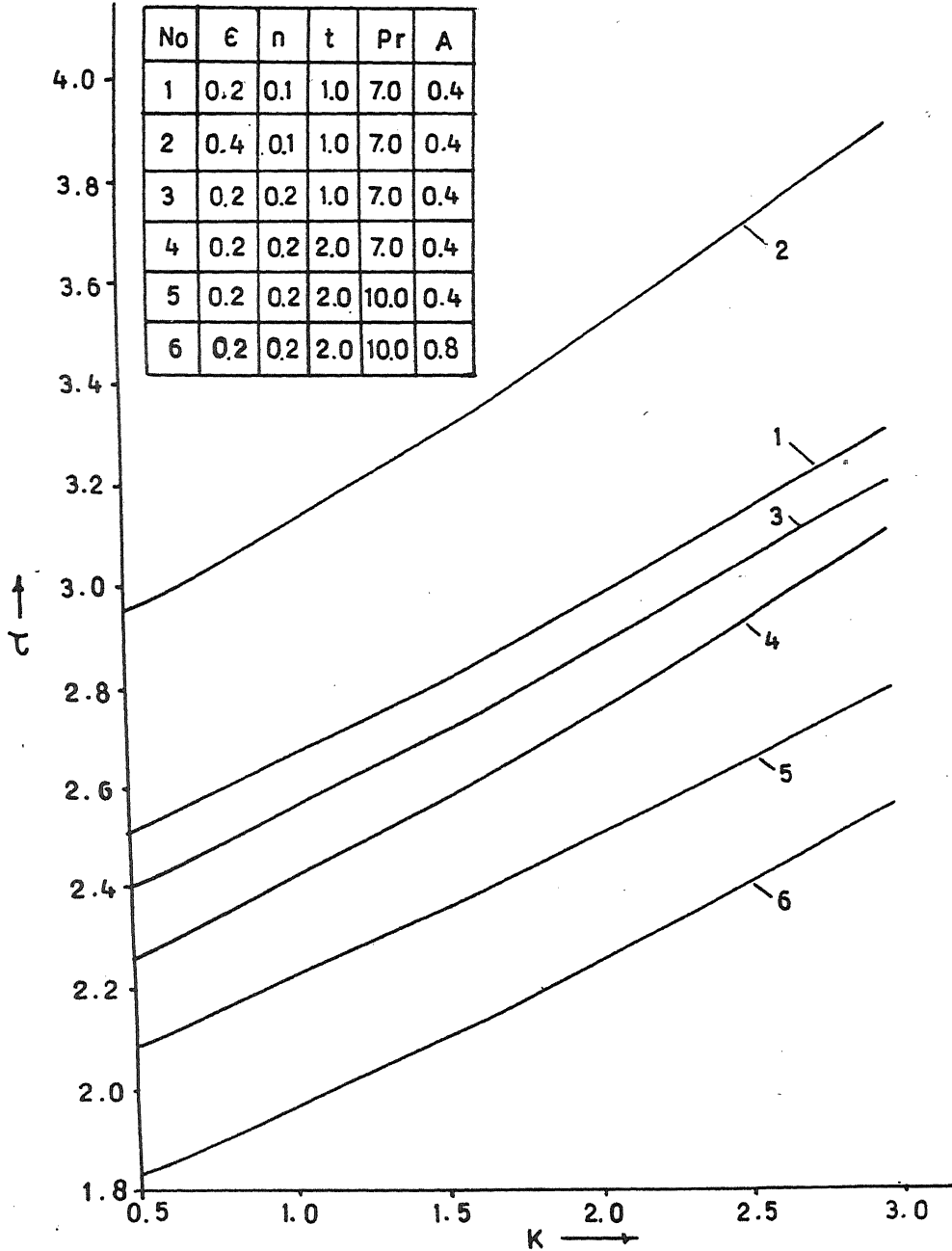
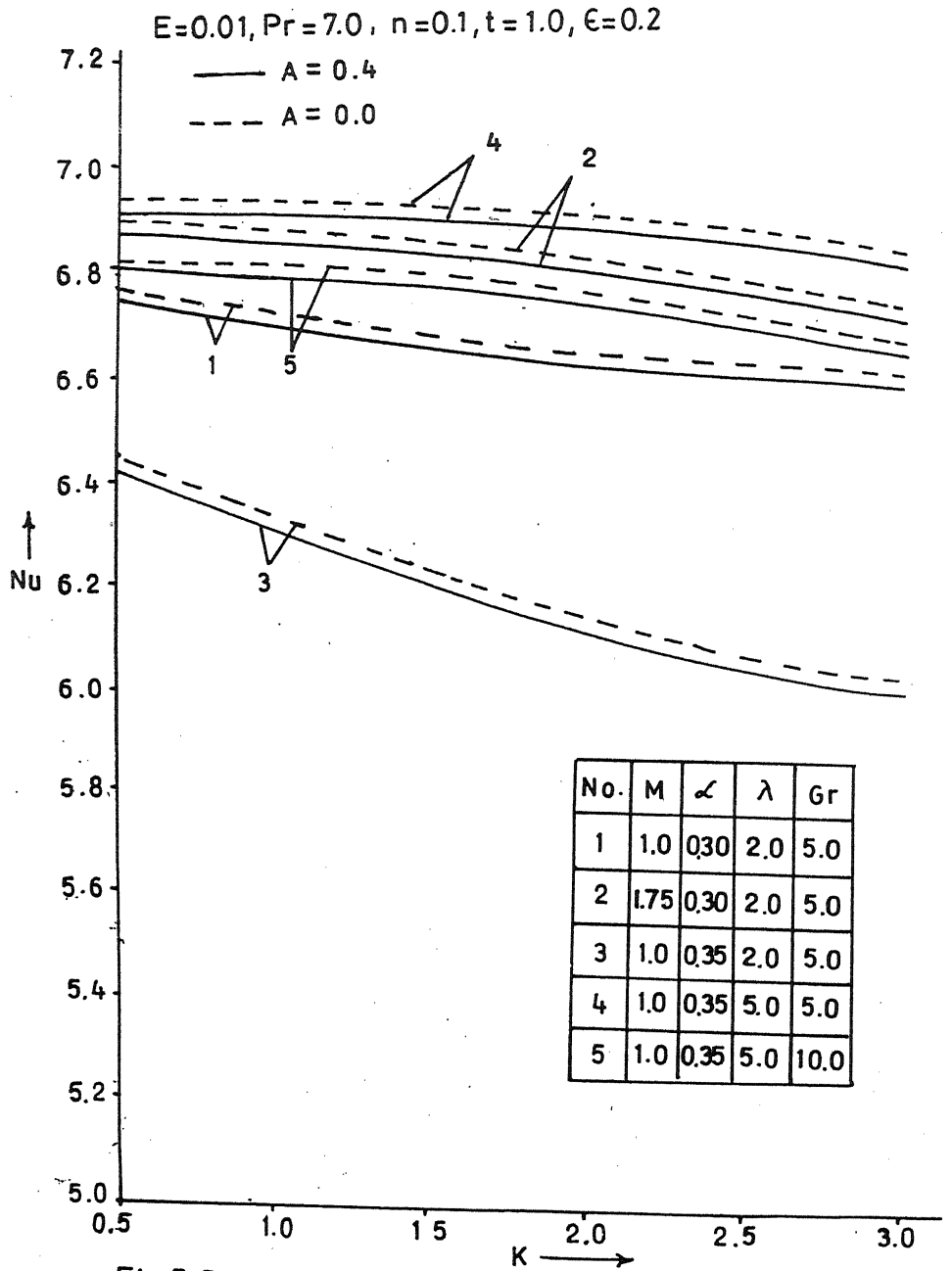
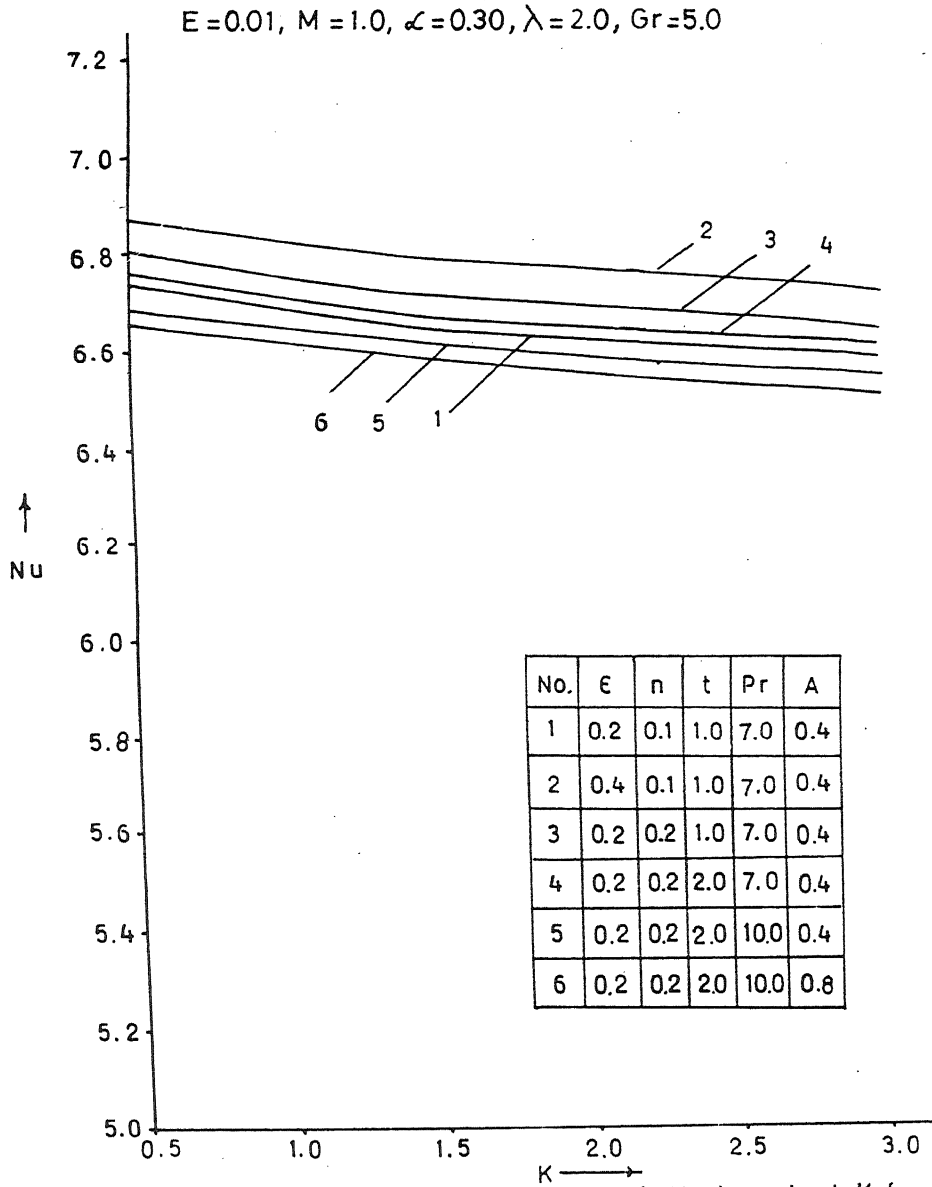



Fig. 6 Rate of heat transfer Nu plotted against K for different values of ε, n, t, Pr and A

चित्र 4 में उपरिस्तर घर्षण को $E = 0.01$, $M = 1.0$, $\alpha = 0.30$, $\lambda = 2.0$ एवं $G_r = 5.0$ के लिए K के विरुद्ध आलेखित किया जाता है। यह देखा जाता है कि जब n, t, P_r एवं A में वृद्धि की जाती है जो उपरिस्तर घर्षण घटता है किन्तु ε में वृद्धि होने से उपरिस्तर घर्षण बढ़ता है।

चित्र 5 में उष्मा स्थानान्तरण की दर को $E = 0.01$, $P_r = 7.0$, $n = 0.1$, $t = 1.0$, $\varepsilon = 0.2$ एवं $A = 0.4$ के लिए K के विरुद्ध आलेखित किया गया है। यह देखा जाता है कि जब α तथा G_r में वृद्धि की जाती है तो उष्मा स्थानान्तरण की दर घटती है किन्तु M तथा λ के लिए यह घटना पलट जाती है।

चित्र 6 में उष्मा स्थानान्तर की दर को $E = 0.01$, $M = 1.0$, $\alpha = 0.30$, $\lambda = 2.0$ एवं $G_r = 5.0$ के लिए K के विरुद्ध आलेखित किया गया है। यह देखा जाता है कि जब t_1 P_r तथा A को बढ़ाया जाता है तो उष्मा स्थानान्तरण की दर घटती है किन्तु ε तथा n में वृद्धि होने में उष्मा स्थानान्तरण की दर बढ़ती है।

कृतज्ञता–ज्ञापन

लेखकद्वय गणित विभाग के अध्यक्ष डॉ. ए. के. माथुर को प्रोत्साहन के लिए धन्यवाद देते हैं। यू० जी० सी० तथा राजस्थान विश्वविद्यालय द्वारा एक लेखक (एन. सी. जैन) को शोध प्रोजेक्ट के माध्यम से आर्थिक सहायता प्राप्त हुई जिसके लिए वह आभारी है।

परिशिष्ट

$$m_{1,2} = \frac{-\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - 4n\lambda}}{2}$$

$$R_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1 + 4(1+\alpha)(M^2 + 1/K)}}{2(1+\alpha)}$$

$$R_{3,4} = \frac{-P \mp \sqrt{P^2 - 4nP}}{2}$$

$$R_{3,4} = \frac{-1 \mp \sqrt{1 + 4(1+\alpha)(M^2 + 1/K - n)}}{2(1+\alpha)}$$

जहाँ $\mathrm{Re}(m_{1,2}) > 0$ तथा $\mathrm{Re}(R_{j,k}) > 0$, $j = 1, 3, 5$, $K = 2, 4, 6$ तथा + संकेत दो मूलों के संगत हैं।

$$A_1 = \frac{L_1\left(R_1^2 - P_r^2\right)}{\lambda + L_2\left(R_1^2 - \lambda^2\right)}$$

$$B_1 = \frac{1}{m_1}\left[\frac{A A_1 \lambda^2}{n} - L_{31} R_5^2 - L_{23} R_3^2 - L_{24} P_r^2 - L_{25} m_1^2 - L_{26} \lambda^2 - L_{27} R_1^2 - L_{28} P_r^2 - L_{29} R_1^2 - L_{30} \lambda^2\right]$$

$$L_1 = \frac{G_r}{\left(P_r + R_1\right)\left(P_r + R_2\right)} \qquad L_2 = \frac{2\alpha\lambda}{\left(\lambda + R_1\right)\left(\lambda + R_2\right)}$$

$$L_3 = \frac{-L_1^2 R_1 P_r}{\left(2R_r + P_r\right)} \qquad L_4 = \frac{-P_r L_1^2}{2}$$

$$L_5 = \frac{-2P_1^2 L_1^2}{\left(R_1 - P_r\right)} \qquad L_6 = \frac{-L_2^2 A_1^2 P_r R_1}{2\left(2R_r + P_r\right)}$$

$$L_7 = \frac{-L_2^2 A_1^2 P_r \lambda}{2\left(2\lambda - P_r\right)} \qquad L_8 = \frac{-2R_1 \lambda P_r L_2^2 A_1^2}{\left(R_1 - \lambda\right)\left(R_1 - \lambda + P_r\right)}$$

$$L_9 = \frac{2L_1 L_2 A_1 P_r R_1}{2\left(2R_1 + P_r\right)} \qquad L_{10} = \frac{2L_1 L_2 A_1 P_r R_1 \lambda}{\left(R_1 - \lambda\right)\left(R_1 - \lambda + P_r\right)}$$

$$L_{11} = \frac{2L_1 L_2 A_1 P_r^2}{\left(R_1 - P_r\right)} \qquad L_{12} = \frac{2L_1 L_2 A_1 P_r^2}{\left(\lambda + P_r\right)}$$

$$L_{13} = -\sum_{i=3}^{12} L_i \qquad L_{14} = \frac{-G_r\left(L_3 + L_6 + L_9\right)}{R_1\left(2R_1 - R_2\right)}$$

$$L_{15} = \frac{-G_r L_4}{\left(2P_r + R_1\right)\left(2P_r + R_2\right)} \qquad L_{16} = \frac{-G_r\left(L_5 + L_{11}\right)}{\left(-P_r\right)\left(R_1 - P_r - R_2\right)}$$

$$L_{17} = \frac{-G_r L_7}{\left(2\lambda + R_1\right)\left(2\lambda + R_2\right)} \qquad L_{18} = \frac{-G_r\left(L_8 + L_{10}\right)}{(-\lambda)\left(R_1 - \lambda - R_2\right)}$$

$$L_{19} = \frac{-G_r L_{12}}{\left(P_r + \lambda + R_1\right)\left(P_r + \lambda + R_2\right)} \qquad L_{20} = \frac{-G_r L_{13}}{\left(P_r + R_1\right)\left(P_r + R_2\right)}$$

$$L_{21} = -\sum_{i=14}^{20} L_i \qquad L_{22} = \frac{-A P_r}{n}$$

$$L_{23} = \frac{-G_r L_{22}}{\left(R_3 - R_5\right)\left(R_3 - R_6\right)} \qquad L_{24} = \frac{-G_r L_{22}}{\left(P_r + R_5\right)\left(P_r + R_6\right)}$$

$$L_{25} = \frac{-2\alpha m_1 B_1}{\left(m_1 - R_5\right)\left(m_1 - R_6\right)} \qquad L_{26} = \frac{2\alpha A A_1 \lambda^2}{n\left(\lambda + R_5\right)\left(\lambda + R_6\right)}$$

$$L_{27} = \frac{-A L_1 R_1}{\left(R_1 - R_1\right)\left(R_1 - R_6\right)} \qquad L_{28} = \frac{-A L_1 P_r}{\left(P_r + R_5\right)\left(P_r + R_6\right)}$$

$$L_{29} = \frac{A A_1 L_2 R_1}{\left(R_1 - R_5\right)\left(R_1 - R_6\right)} \qquad L_{30} = \frac{A A_1 L_2 \lambda}{\left(\lambda + R_5\right)\left(\lambda + R_6\right)}$$

$$L_{31} = -\sum_{i=23}^{30} L_i \qquad L_{32} = \frac{-P_r A L_{13}}{n}$$

$$L_{33} = \frac{-2 P_r A R_1 \left(L_3 + L_6 + L_9\right)}{\left(2 R_1 - R_3\right)\left(2 R_1 - R_4\right)} \qquad L_{34} = \frac{2 P_r A L_4}{\left(2 P_r + n\right)}$$

$$L_{35} = \frac{\left(L_5 + L_{11}\right)\left(R_1 - P_r\right) P_r A}{\left(R_1 - P_r - R_3\right)\left(R_1 - P_r - R_4\right)} \qquad L_{36} = \frac{2 \lambda P_r A L_7}{\left(2 \lambda + R_3\right)\left(2 \lambda + R_4\right)}$$

$$L_{37} = \frac{-\left(L_8 + L_{10}\right)\left(R_1 - \lambda\right) P_r A}{\left(R_1 - \lambda - R_3\right)\left(R_1 - \lambda - R_4\right)} \qquad L_{38} = \frac{L_{12}\left(P_r + \lambda\right) P_r A}{\left(P_r + \lambda + R_3\right)\left(P_r + \lambda + R_4\right)}$$

$$L_{39} = \frac{-2 P_r R_1 L_{11}\left(L_1 - A_1 L_2\right)}{\left(R_1 + R_5 - R_3\right)\left(R_1 + R_5 - R_4\right)} \qquad L_{40} = \frac{-2 P_r R_1 L_{23}\left(L_1 - A_1 L_2\right)}{R_1\left(R_1 + R_3 - R_4\right)}$$

$$L_{41} = \frac{-2 P_r R_1\left(L_{24} + L_{28}\right)\left(L_1 - A_1 L_2\right)}{\left(R_1 - P_r - R_3\right)\left(R_1 - P_r - R_4\right)}$$

$$L_{42} = \frac{-2 P_r R_1 L_{25}\left(L_1 - A_1 L_2\right)}{\left(R_1 + m_1 - R_3\right)\left(R_1 + m_1 - R_4\right)}$$

$$L_{43} = \frac{-2 P_r R_1\left(L_{26} + L_{30}\right)\left(L_1 - A_1 L_2\right)}{\left(R_1 - \lambda - R_3\right)\left(R_1 - \lambda - R_4\right)}$$

$$L_{44} = \frac{-2 P_r R_1\left(L_{27} + L_{29}\right)\left(L_1 - A_1 L_2\right)}{\left(2 R_1 - R_3\right)\left(2 R_1 - R_4\right)}$$

$$L_{45} = \frac{-2 P_r^2 L_1 L_{31}}{\left(R_1 - P_r - R_3\right)\left(R_1 - P_r - R_4\right)}$$

$$L_{46} = \frac{-2 P_r^2 L_1 L_{23}}{\left(- P_r\right)\left(R_3 - P_r - R_4\right)} \qquad L_{47} = \frac{-2 P_r L_1 \left(L_{24} + L_{28}\right)}{\left(2 P_r + n\right)}$$

$$L_{48} = \frac{-2 P_r^2 L_1 L_{25}}{\left(m_1 - P_r - R_3\right)\left(m_1 - P_r - R_4\right)} \qquad L_{49} = \frac{-2 P_r^2 L_1 \left(L_{26} + L_{30}\right)}{\left(P_r + \lambda + R_3\right)\left(P_r + \lambda + R_4\right)}$$

$$L_{50} = \frac{-2 P_r^2 L_1 \left(L_{27} + L_{29}\right)}{\left(R_1 - P_r - R_3\right)\left(R_1 - P_r - R_4\right)}$$

$$L_{51} = \frac{2 P_r A_1 L_2 \lambda L_{31}}{\left(R_5 - \lambda - R_3\right)\left(R_5 - \lambda - R_4\right)}$$

$$L_{52} = \frac{2 P_r A_1 L_2 \lambda L_{23}}{\left(- \lambda\right)\left(R_3 - \lambda - R_4\right)} \qquad L_{53} = \frac{-2 P_r A_1 L_2 \lambda \left(L_{24} + L_{28}\right)}{\left(2 P_r + n\right)}$$

$$L_{54} = \frac{2 P_r A_1 L_2 \lambda L_{25}}{\left(m_1 - \lambda - R_3\right)\left(m_1 - \lambda - R_4\right)} \qquad L_{55} = \frac{2 P_r A_1 L_2 \lambda \left(L_{26} + L_{30}\right)}{\left(2 \lambda + R_3\right)\left(2 \lambda + R_4\right)}$$

$$L_{56} = \frac{2 P_r A_1 L_2 \lambda \left(L_{27} + L_{29}\right)}{\left(R_1 - \lambda - R_3\right)\left(R_1 - \lambda - R_4\right)} \qquad L_{57} = - \sum_{i=32}^{56} L_i$$

$$L_{58} = \frac{-G_r L_{57}}{\left(R_3 - R_5\right)\left(R_3 - R_6\right)} \qquad L_{59} = \frac{-\left(G_r L_{32} - A P_r L_{20}\right)}{\left(P_r + R_5\right)\left(P_r + R_6\right)}$$

$$L_{60} = \frac{-\left\{G_r\left(L_{33} + L_{44}\right) + 2 A R_1 L_{14}\right\}}{\left(2 R_1 - R_5\right)\left(2 R_1 - R_6\right)} \qquad L_{61} = \frac{-\left\{G_r\left(L_{34} + L_{47}\right) - 2 A L_{15}\right\}}{\left(2 P_r + R_5\right)\left(2 P_r + R_6\right)}$$

$$L_{62} = \frac{-\left\{G_r\left(L_{35} + L_{41} + L_{50}\right) + L_{16}\left(R_1 - P_r\right)A\right\}}{\left(2R_1 - R_5\right)\left(2R_1 - R_6\right)}$$

$$L_{63} = \frac{-\left\{G_r\left(L_{36} + L_{55}\right) - 2\lambda A L_{17}\right\}}{\left(2\lambda + R_5\right)\left(2\lambda + R_6\right)}$$

$$L_{64} = \frac{-\left\{G_r\left(L_{37} + L_{43} + L_{56}\right) + L_{18}\left(R_1 - \lambda\right)A\right\}}{\left(R_1 - \lambda - R_5\right)\left(R_1 - \lambda - R_6\right)}$$

$$L_{65} = \frac{-\left\{G_r\left(L_{38} + L_{49} + L_{53}\right) - L_{19}\left(P_r + \lambda\right)A\right\}}{\left(P_r + \lambda + R_5\right)\left(P_r + \lambda + R_6\right)}$$

$$L_{66} = \frac{-G_r L_{39}}{R_1\left(R_1 + R_5 - R_6\right)}$$

$$L_{67} = \frac{-G_r L_{40}}{\left(R_1 + R_3 - R_5\right)\left(R_1 + R_3 - R_6\right)}$$

$$L_{68} = \frac{-G_r L_{42}}{\left(R_1 + m_1 - R_5\right)\left(R_1 + m_1 - R_6\right)}$$

$$L_{69} = \frac{-G_r L_{45}}{\left(-P_r\right)\left(R_5 - P_r - R_6\right)}$$

$$L_{70} = \frac{-G_r L_{46}}{\left(R_3 - P_r - R_5\right)\left(R_3 - P_r - R_6\right)}$$

$$L_{71} = \frac{-G_r L_{48}}{\left(m_1 - P_r - R_5\right)\left(m_1 - P_r - R_6\right)} \qquad L_{72} = \frac{-G_r L_{51}}{\left(-\lambda\right)\left(R_5 - \lambda - R_6\right)}$$

$$L_{73} = \frac{-G_r L_{52}}{\left(R_3 - \lambda - R_5\right)\left(R_3 - \lambda - R_6\right)} \qquad L_{74} = \frac{-G_r L_{54}}{\left(m_1 - \lambda - R_5\right)\left(m_1 - \lambda - R_6\right)}$$

$$L_{75} = \frac{-A R_1 L_{21}}{\left(R_1 - R_5\right)\left(R_1 - R_6\right)} \qquad L_{76} = -\sum_{i=58}^{75} L_i$$

निर्देश

1. गेभर्ट, बी. तथा पेरा, एल., Int. J. Heat. Mass Transfer, 1971, 14, 2025.
2. स्पैरो, ई. एम., मिन्कोव्येज, जे. जे. तथा एकर्ट, ई. आर. जी. J. Heat Trans. ASME, 1964, 86 C, 508.
3. सुडलगेकर, वी. एम., Proc. Indian Acad. Sci., 1976, 84 A, 5, 194.
4. रैप्टिस, ए., जिवैनिडिस, जी तथा कैफूसियास एन., Letters in Heat and Mass Transfer 1981, 8, 417.
5. यमामोटो के. तथा इवामुरा, एन. J. Engin. Math., 1976, 10, 41.
6. यमामोटो, के. तथा यशीदा, जेड., J. Phys. Soc. Japan, 1970, 10, 774.
7. एरो, ई. एल. बुलिगिन, ए. एल. तथा क्रुवश्चिन्स्की, ई. वी. Prikl. Math. Mech. 1965, 29, 297 [J. Appl. Math. Mech. 1965, 29, 333].
8. डेप, एन. वी., Prikl. Math. Mech. 1968, 32, 748 [J. Appl. Math. Mech. 1968, 32, 777].
9. रैप्टिस, ए. Bull de la classe des Sc. 1983, LXIX, 530.
10. जैन, एन. सी. तथा तनेजा, राजीव (प्रकाशानाधीन).
11. तनेजा, राजीव तथा जैन एन. सी. (प्रकाशानाधीन).
12. जैन, एन. सी. तथा तनेजा, राजीव (प्रेषित).

'ijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 45, No. 3, July 2002.

Lip (α, p) वर्ग से सम्बन्धित फलन के संयुग्मी के सन्निकटन की मात्रा

श्यामलाल
गणित विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद
तथा
कल्पनाथ सिंह यादव
गणित विभाग, केन्द्रीय विद्यालय, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय,
वाराणसी (उ. प्र.)

[प्राप्त — मई, 27, 2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में *Lip* (α, p) के फलन के संयुग्मी के सन्निकटन की मात्रा पर एक नवीन प्रमेय स्थापित की गई है।

Abstract

On the degree of approximation of conjugate of a function belonging to Lip (α, p) class by matrix summability means of conjugate Fourier series. *By* Shyam Lal, Department of Mathematics, University of Allahabad and Kalpnath Singh Yadav, Department of Mathematics, Kendriya Vidyalaya, B.H.U. Campus, Varanasi (U.P.).

Quereshi (1981) determined the degree of approximation of conjugates of functions belonging to Lip α and Lip (α, p) classes. In this paper a new theorem on the degree of approximation of conjugate of a function of Lip (α, p) class by matrix summability means of conjugate Fourier series has been established so that both results of Quereshi come out as particular cases of our theorem.

1. प्रस्तावना

बर्नस्टीन[13], एलेक्जिट्स[4], साहनी[2] तथा चन्द्रा[12] ने *Lip* α से सम्बन्धित एक फलन के सन्निकटन की मात्रा ज्ञात की है। साहनी[10] तथा खान[5] ने भी इसी दिशा में अध्ययन किया है। कुरैशी[6, 7] ने *Lip* (α, p) से सम्बन्धित फलन के संयुग्मी के सन्निकट की मात्रा की विवेचना की है। प्रस्तुत प्रपत्र में *Lip* (α, p) वर्ग के फलन के संयुग्मी के सन्निकटन की मात्रा की स्थापना की गई है।

2. परिभाषाएं तथा संकेतन

माना कि f आवर्त 2π के साथ आवर्ती है और लेबेस्ग के रूप में समाकलनीय है। माना कि इसकी फूरियर श्रेणी को

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) \tag{2.1}$$

द्वारा दिया जाता है। फूरियर श्रेणी (1.1) की संयुग्मी श्रेणी को

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin nx + b_n \cos nx \right) \tag{2.2}$$

द्वारा प्रदर्शित करते हैं। माना कि $T=(a_{n,k})$ एक अपरिमित त्रिभुजाकार मैट्रिक्स है जो नियमितता के सिलवरमान टोपलिट्ज प्रतिबन्ध की[11] तुष्टि करता है

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \to 1, \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty, \; a_{n,k} = 0 \;\; k > n \quad \text{के लिए}$$

तथा

$$\sum_{k=0}^{n} \left| a_{n,k} \right| \leq M \quad \text{परिमित अचर है}$$

माना कि $\sum_{m=0}^{\infty} u_m$, अनन्त श्रेणी है जिससे कि $S_k = \sum_{v=0}^{k} u_v$.

अनुक्रमशः रूपान्तर

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n,\, n-k}\; S_{n-k}$$

अनुक्रम $\{S_n\}$ के मैट्रिक्स माध्य के अनुक्रम $\{\sigma_n\}$ को परिभाषित करता है जो $(a_{n,k})$ गुणांकों के अनुक्रमों द्वारा उत्पन्न होता है। श्रेणी $\sum u_n$ को मैट्रिक्स विधि द्वारा योगफल S तक संकलनीय कहा जाता है यदि $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ का अस्तित्व हो और यह S के तुल्य हो (जिगमुण्ड[1])। हम लिखेंगे :

$$\sigma_n \to S(T), \quad \text{ज्यों ज्यों} \quad n \to \infty$$

मैट्रिक्स माध्यमों की सात महत्त्वपूर्ण विशिष्ट दशाएं इस प्रकार हैं–

(i) (C, 1) Yाध्य जब $\quad a_{n,k} = \dfrac{1}{n+1}$

(ii) हार्मोनिक माध्य जब $\quad a_{n,k} = \dfrac{1}{(n-k+1)\log n}$

(iii) (C, δ) माध्य जब $\quad a_{n,k} = \dfrac{(n-k+\delta_{\delta-1}-1)}{(n+\delta_{\delta})}$

(iv) (H, p) माध्य जब $\quad a_{n,k} = \dfrac{1}{(\log)^{p-1}_{(n+1)}} \prod_{q=0}^{p-1} \log^q (k+1)$

(v) नार्लुंड माध्य[9] जब $\quad a_{n,k} = \dfrac{p_{n-k}}{p_n}$, जहाँ $p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$

(vi) रीज माध्य (N, p_n) जब $\quad a_{n,k} = p_k / p_n$

(vii) सार्वीकृत नार्लुंड माध्य (N, p, q)[3] जब $\quad a_{n,k} = \dfrac{p_{n-k}\, q_k}{R_n}$ जहाँ $R_n = \sum_{k=0}^{n} p_k\, q_{n-k}$

हम नार्म (norm) को

$$||f||_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right\}, \; p \geq 1$$

द्वारा परिभाषित करते हैं।

माना कि सन्निकटन की मात्रा जिगमुण्ड[1] के अनुसार है–

$$E_n(f) = \min_{T_n} \left|\left| f - T_n \right|\right|_p$$

जहाँ $T_n(x)$ कोई nवीं कोटि का त्रिकोणमितीय बहुपद है

फल $f \in Lip\, \alpha$ यदि

$$f(x + t) - f(x) = 0\ (|t|^{\alpha})\ 0 < \alpha \leq 1 \text{ के लिए}$$

$$f \in Lip\,(\alpha, p)$$

यदि

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |f(x + t) - f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} = 0\left(t^a\right), \quad 0 < \alpha \leq 1, p \geq 1$$

(मकफैडेन[8] द्वारा की गई परिभाषा 5.38)

हम निम्नांकित संकेतों का उपयोग करेंगे

$$\psi(t) = f(x + t) - f(x - t)$$

$$A_{n, \tau} = \sum_{k=0}^{\tau} a_{n, n-k}$$

$$\tau = \frac{1}{\tau} \text{ का समाकल अंक} = \left[\frac{1}{t}\right]$$

$$K_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} a_{n, n-k} \frac{\cos\left(n - k + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}}$$

3. ज्ञात प्रमेय

कुरैशी ने[6, 7] निम्नांकित प्रमेय सिद्ध किये हैं–

प्रमेय A : यदि अनुक्रम $\{p_n\}$ निम्नांकित प्रतिबन्धों को तुष्ट करता है

$$n\left|p_n\right| < C\left|p_n\right|$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\left|p_k - p_{k-1}\right| < C\left|p_n\right|$$

तो फलन $\bar{f}(x)$ की सन्निकटन मात्रा को, जो आवर्ती फलन f के साथ आवर्त 2π के प्रति संयुग्मी है और अपनी संयुग्मी श्रेणी के नार्लुंड माध्यों द्वारा Lip $\alpha, 0<\alpha<1$ वर्ग से सम्बन्धित से होता है, तो उसे निम्नांकित द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

$$\left|\bar{f}(x) - \bar{t}_n(x)\right| = O\left(\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k^{\alpha+1}}\right)$$

जहाँ $\bar{t}_n(x)$ श्रेणी (2.2) के (N, p_n) माध्य हैं।

प्रमेय B : यदि $f(x)$ आवर्ती हो तो $0<\alpha<1$ के लिए वर्ग $Lip(\alpha, p)\ 0<\alpha<1$ से सम्बन्धित हो तथा यदि $\{p_n\}$ अनृण तथा अवर्धमान अनुक्रम हो वास्तविक अचरों का, जिससे कि

$$P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v \to \infty \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty$$

तथा

$$\left(\int_1^n \frac{(P(y))^q}{y^{q\alpha+2-\delta q-q}}\,dy\right)^{1/q} = O\left(\frac{P(n)}{n^{\alpha-(1/q)-\delta-1}}\right)$$

तब

$$\left\|\bar{t}_n - \bar{f}\right\|_p = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-(1/p)}}\right)$$

जहाँ $\bar{t}_n$ श्रेणी (2.2) के (N, p_n) माध्य हैं तथा $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ जिससे कि $1 \le p \le \infty$.

4. मुख्य प्रमेय

यहाँ पर प्रमेय A तथा B की अपेक्षा अधिक सामान्य परिणाम की स्थापना निम्नांकित रूप में की गई है।

प्रमेय : यदि $T=(a_{n,k})$ एक अपरिमित नियमित त्रिभुजाकार मैट्रिक्स हो जिससे कि तत्व $a_{n,k}$ अनृण तथा k के साथ अवर्धमान हो तो फलन $\bar{f}(x)$ के सन्निकटन की मात्रा को, जो 2π आवर्ती फलन f का संयुग्मी हो तथा $0<\alpha<1$ के लिए वर्ग $Lip(\alpha, p)$ से अपनी संयुग्मी श्रेणी के मैट्रिक्स संकलनीयता माध्यों द्वारा सम्बद्ध हो, तो उसे

$$E_n(\bar{f}) = \min_{\bar{\sigma}_n} \left|\left| \bar{\sigma}_n(x) - \bar{f}(x) \right|\right|_p = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-(1/p)}}\right)$$

के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जहाँ

$$\bar{\sigma}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k} \bar{S}_{n-k}$$

अर्थात् संयुग्मी फूरियर श्रेणी (2.2) के मैट्रिक्स माध्य तथा

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t) \cot\frac{1}{2} t\, dt$$

5. प्रमेयिकाएँ

हमारे प्रमेय की उपपत्ति के लिए निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता पड़ेगी।

प्रमेयिका (5.1) : साहनी तथा गोयल[2]

यदि अनुक्रम $\{p_n\}$ अनृण तथा अवर्धमान हो तो $a > 0$ के लिए

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{\alpha+1}} \tag{5.1}$$

प्रमेयिका (5.2) : यदि $a_{n,k}$ अनृण तथा k के साथ अवर्धमान हो तो $0 \leq a \leq b \leq \infty$, $0 \leq t \leq \pi$ के एवं किसी n के लिए

$$\left| \sum_{k=a}^{b} a_{n, D}\ n - k e^{i(n-k)t} \right| \leq 0 \left(A_{n, \tau} \right).$$

उपपत्ति : माना कि $\tau = \left[\frac{1}{t} \right]$, तब

$$\left| \sum_{k=a}^{b} a_{n, n-k}\ e^{i(n-k)t} \right| = \left| e^{int} \sum_{k=0}^{b} a_{n, n-k}\ e^{ikt} \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=a}^{r-1} a_{n, n-k}\ e^{-ikt} \right| + \left| \sum_{k=r}^{b} a_{n, n-k}\ e^{-ikt} \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=a}^{r-1} a_{n, n-k} \right| + a_{n, n-r} \sum_{r \leq k \leq r \leq b}^{r} e^{-ikt}$$

(ऐबेल की प्रमेयिका द्वारा)

$$\leq A_{n, \tau-1} + a_{n, n-\tau} \left| \frac{e^{-i\tau t}\left\{ 1 - \left(e^{it} \right)^{r-\tau+1} \right\}}{\left(1 - e^{-it} \right)} \right|$$

$$\leq A_{n, \tau} + a_{n, n-\tau} \left| \frac{e^{-i\tau t}}{e^{-it/2}} \right| \left| \frac{1 - e^{-i(r-\tau+1)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \right|$$

$$\leq A_{n, \tau} + \frac{2\, a_{n, n-\tau}}{\sin \frac{t}{2}} \tag{5.2}$$

अब

$$A_{n, \tau} = \sum_{k=0}^{t} a_{n, n-k}$$

$$= A_{n,n} + a_{n,n-1} + \ldots + a_{n,n-\tau}$$

$$\geq a_{n,n-\tau} + a_{n,n-\tau} + \ldots + a_{n,n-\tau}$$

$$= (\tau + 1)\, a_{n,n-\tau}$$

$$\geq \frac{a_{n,n-\tau}}{t} \qquad \left(\because \ \tau = \left[\frac{1}{t}\right]\right)$$

इस तरह हमें प्राप्त होता है कि

$$\frac{a_{n,n-\tau}}{t} = 0\left(A_{n,\tau}\right) \tag{5.3}$$

(5.2) एवं (5.3) के द्वारा

$$\left| \sum_{k=a}^{b} a_{n,n-k}\, e^{i(n-k)t} \right| \leq A_{n,\tau} + 0\left(A_{n,\tau}\right)$$

$$= 0\left(A_{n,\tau}\right)$$

इस प्रकार से प्रमेयिका सिद्ध हुई।

प्रमेयिका (5.3) : $0 < 1/n \leq t \leq \pi$ के लिए $(a_{n,k})$ के लिए हमारे प्रमेय के प्रतिबन्ध के अन्तर्गत

$$\left| \overline{K}_n(t) \right| = 0\left(\frac{A_{n,\tau}}{t}\right)$$

उपपत्ति : चूँकि $0 < 1/n \leq t \leq \pi$, $\sin(t/2), < t$, के लिए अतः $t > 0$ एवं $\tau \leq n$ के लिए हमें प्राप्त होगा—

$$\left| \overline{K}_n(t) \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k} \frac{\cos\left(n - k + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{2\pi} \text{ real part of } \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n,n-k}\, e^{i\left(n-k-\frac{1}{2}\right)t}}{\sin \frac{t}{2}} \right|$$

$$= O\left\{ \frac{1}{t} \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k}\, e^{i(n-k)t} \right| \left| e^{-it/2} \right| \right\}$$

$$= O\left(\left| \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k}\, e^{i(n-k)t} \right| \right)$$

$$= O\left(\frac{A_{n,\tau}}{t} \right). \qquad \text{प्रमेयिका (5.2) द्वारा}$$

6. मुख प्रमेय की उपपत्ति

माना कि $\bar{S}(x)$ श्रेणी (2.2) के nवें आंशिक योगफल का सूचक है। तब लाल[14] का अनुगमन करने पर

$$\bar{S}_n(x) - \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \cot \frac{1}{2} t\, dt \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sin \frac{t}{2}}$$

अब

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k} \left[S_{n-k} - \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \cot \frac{1}{2} t\, dt \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k} \frac{\cos\left(n-k-\frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}$$

अथवा

$$\bar{\sigma}_n(x) - \bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t) \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k} \frac{\cos\left(n-k-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$= \int_0^{\pi} \psi(t)\, \bar{K}_n(t)\, dt$$

$$= \int_0^{1/n} \psi(t)\, \bar{K}_n(t)\, dt + \int_{1/n}^{\pi} \psi(t)\, \bar{K}_n(t)\, dt$$

$$= I_1 + I_2, \text{ माना} \qquad (6.1)$$

होर्डर की असमिका का सम्प्रयोग करके तथा इस तथ्य के अनुसार कि $\psi(t) \in Lip(\alpha, p)$, तो हमें प्राप्त होता है

$$\left|I_1\right| \leq - \int_0^{1/n} |\psi(t)| \left|\bar{K}_n(t)\right| dt$$

$$= \int_0^{1/n} |\psi(t)| \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k} \frac{\cos\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \right| dt$$

$$= O\left\{ \int_0^{1/n} \left(\frac{|\psi(t)|}{t^{\alpha}} \right)^p dt \right\}^{1/p}$$

$$\times \left(\int_0^{1/n} \left(\frac{1}{t^{-\alpha}} \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k} \cos\left(n-k+\frac{1}{2}\right)t \right| \right)^q dt \right)^{1/q}$$

$$= 0\,(1) \left(\int_0^{1/n} \left(\frac{1}{t^{2-\alpha}} \sum_{k=0}^{n} a_{n,\, n-k} \right)^q dt \right)^{1/q}$$

$$= 0\,(1) \left(\int_0^{1/n} \left(\frac{1}{t^{1-\alpha}} A_{n,\, n} \right)^q dt \right)^{1/q}$$

$$= 0\,(1) \left(\int_0^{1/n} \frac{1}{t^{q\,(1-\alpha)}}\; 0\,(1)\; dt \right)^{1/q}$$

$$= 0\,(1) \left(\int_0^{1/n} \frac{dt}{t^{q\,(1-\alpha)}} \right)^{1/q}$$

$$= 0\,(1) \left\{ \left(\frac{t^{-q\,(1-\alpha)+1}}{-\,q\,(2-\alpha)+1} \right)_0^{1/n} \right\}^{1/q}$$

$$= 0\,(1)\, 0 \left(n^{1-\alpha-\frac{1}{q}} \right)$$

$$= 0 \left(n^{-\alpha+1-\frac{1}{q}} \right)$$

$$= 0 \left(n^{-\alpha+\frac{1}{p}} \right) \qquad \left(\because\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

इस तरह

$$\left| I_1 \right| = 0 \left(\frac{1}{n^{\alpha-(1/p)}} \right) \tag{6.2}$$

इसी प्रकार से

$$\left|I_1\right| = 0\left[\left\{\int_{1/n}^{\pi}\left(\frac{t^{-\delta}\,|\psi(t)|}{t^{\alpha}}\right)^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_{1/n}^{\pi}\left(\frac{\overline{K}_n\,(t)|}{t^{-\alpha-\delta}}\right)^q dt\right\}^{1/q}\right]$$

$$= 0\left[\left\{\int_{1/n}^{\pi}\left(\frac{t^{-\delta}\,t^{\alpha-(1/p)}}{t^{\alpha}}\right)^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_{1/n}^{\pi}\left(\frac{0\left(A_{n,\tau}\right)}{t^{1-\alpha-\delta}}\right)^q dt\right\}^{1/q}\right]$$

(प्रमेयिका 5.3 द्वारा)

$$= 0\left[\left\{\int_{1/n}^{\pi}\left(t^{-\delta-(1/p)}\right)^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_{1/\pi}^{n}\left(\frac{\left(A_{n,y}\right)}{y^{\alpha+\delta-1}}\right)^q \frac{dy}{y^2}\right\}^{1/q}\right]$$

$$= 0\left[\left\{\int_{0}^{1/n} t^{-\delta p-1}\, dt\right\}^{1/p}\left\{\int_{1}^{n}\frac{dy}{y^{q(\alpha+\delta-1)+2}}\right\}^{1/q}\right]$$

$$= 0\left(n^{\delta}\right)0\left[\left\{\frac{y^{-q(\alpha+\delta-1)-2+1}}{-q^{(\alpha+\delta-1)-1}}\right\}_1^n\right]^{1/q}$$

$$= 0\left(n^{\delta}\right)0\left\{\left(n^{-q(\alpha+\delta-1)-1}\right)^{1/q}\right\}$$

$$= 0\left(n^{\delta}\right)0\left(n^{-(\alpha+\delta-1)-\frac{1}{q}}\right)$$

$$= 0\left(n^{\delta-\alpha-\delta+1-\frac{1}{q}}\right)$$

$$= 0\left(n^{-\alpha+\frac{1}{p}}\right)$$

$$= 0\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}\right) \qquad (6.3)$$

(6.1), (6.2) तथा (6.3) से हम पाते हैं कि

$$\left|\bar{\sigma}_n(x) - \bar{f}(x)\right| = 0\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}\right) \qquad (6.4)$$

इसलिए

$$\left\|\bar{\sigma}_n(x) - \bar{f}(x)\right\|_p = 0\left[\int_0^{2\pi}\left\{\left|\bar{\sigma}_n(x) - \bar{f}(x)\right|\right\}^p dx\right]^{1/p}$$

$$= 0\left[\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}\right)^p dx\right]^{1/p}$$

$$= 0\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}\right)\left\{\int_0^{2\pi} dx\right\}^{1/p}$$

इस तरह

$$\left\|\bar{\sigma}_n(x) - \bar{f}(x)\right\|_p = 0\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}\right)$$

इससे प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

7. विशिष्ट दशाएं

(1) यदि

$$a_{n,k} = \frac{p_{n-k}}{p_n},\ p \to \infty$$ प्रमेयिका (5.1) का उपयोग करते हुए

तो कुरैशी का परिणाम (प्रमेय A)[6] मुख्य प्रमेय की विशिष्ट दशा बन जाती है।

इसके लिए

$$\left| \bar{t}_n(x) - \bar{f}(x) \right| = 0\left(\frac{1}{n^{\alpha - \frac{1}{p}}} \right) \qquad (6.4)\text{से}$$

$$= 0\left(\frac{1}{n^{\alpha}} \right) \qquad p \to \infty \text{ लेने पर}$$

$$= 0\left[\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k^{\alpha+1}} \right] \qquad \text{(प्रमेयिका (5.1) द्वारा)}$$

इस तरह

$$\left| \bar{f}_n(x) - \bar{t}(x) \right| = 0\left[\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k^{\alpha+1}} \right]$$

(2) कुरैशी का परिणाम([7], प्रमेय B) हमारे प्रमेय की विशिष्ट दशा हो जाती है यदि

$$a_{n,k} = \frac{p_{n-k}}{P_n} \text{ जहाँ } P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty .$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय प्रो. एल. एम. त्रिपाठी तथा प्रो. एस. एन. लाल, गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी के आभारी हैं जिन्होंने अपने बहुमूल्य सुझावों से उपकृत किया है।

निर्देश

1. जिगमुंड, ए. : Trigonometric Series, V. Warszawa 1935 पृष्ठ 40-41.
2. साहनी, बी. एन. तथा गोयल, डी. एस. : Ranchi Univ. Maths. J., 1973, 4, 50-53.
3. बोर्वीन, डी. : Jour. London Math. Soc., 1958, 33, 353-357.
4. एलिक्सिट्स, जी. : Mathe Annal, 1928, 100, 264-277.
5. खान, हुजूर, एच. : Indian J. Pure, & Appl. Math, 1974, 5 (2), 132-136.
6. कुरैशी, कुतुबद्दीन : Indian J. Pure appl. Math., 1981, 9 1120-1123.

7. वही. : Indian J. Pure appl 1981, 4.

8. फैडेन, एलमैक : Duke Main. J., 1942, 9, 168-207.

9. नार्लुंड, एन. ई. : Lund. Universitiets Arsskrift, 1919, 16, 1-10.

10. साहनी, एन. तथा गोपालराव : Bull. Aust. Math. Soc. 1976, 6, 11-18.

11. टोप्लिट्ज, ओ. : Uberallagemeine lineara Mittel bil dunger P.M.F. 1913, 22, 113-119.

12. प्रेमचन्द्र : Nanta Math. 1975, 8, 88-89.

13. बर्नस्टाइन, एस. : Memoirs Acad. Roy. Belyique 1912, 2, 1-104.

14. श्याम लाल : Bulletin of Calcutta Math. Soc. 1997, 89, 97-104.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, **150**, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख ''सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2''इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक